数 学 试 题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|2x-4\leqslant 0\}$，$B=\{x|(x-1)^2-4<0\}$，则 $A\cap B=$

A.$(-\infty,-1)$　　B.$(-1,3)$　　C.$(-1,2]$　　D.$[2,3]$

2.已知复数 z 满足 $z(2+i)=3-i$（i 为虚数单位），则在复平面内 z 的共轭复数所对应的点在

A.第一象限　　B.第二象限　　C.第三象限　　D.第四象限

3.一袋中装有大小、质地均相同的1个白球，3个黄球和2个黑球，从中任取3个球，则至少含有一个黑球的概率是

A.$\frac{7}{15}$　　B.$\frac{8}{15}$　　C.$\frac{1}{5}$　　D.$\frac{1}{2}$

4.设 $a=\ln 2$，$b=\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}$，$c=\frac{2}{e}$，则 a,b,c 的大小关系为

A.$a<b<c$　　B.$b<a<c$　　C.$b<c<a$　　D.$c<a<b$

5.数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的正项等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，若 $b_1=a_2$，$b_2=a_5$，$b_3=a_{11}$，则数列 $\{b_n\}$ 的公比为

A.2　　B.3　　C.5　　D.11

6.记抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，$A(4,m)$ 为抛物线上一点，$|AF|=6$，直线 AF 与抛物线另一交点为 B，则 $\frac{|AF|}{|BF|}=$

A.$\frac{1}{3}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.2　　D.3

7.P 是直线 $3x-4y+5=0$ 上的一动点，过 P 作圆 $C:x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 的两条切线，切点分别为 A,B，则四边形 $PACB$ 面积的最小值为

A.$\sqrt{2}$　　B.$2\sqrt{2}$　　C.$4\sqrt{2}$　　D.$8\sqrt{2}$

12.已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，若 $f(x-2)=f(-x)$，$f(x)+g(x+3)=3$，$f(-x-2)-g(x+1)=-1$，且 $f(-1)=2$，则下列结论正确的是

A.函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　B.$g(1)=2$

C.函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称　　D.$\sum\limits_{m=1}^{2023} g(m)=4046$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知角 α 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴非负半轴，终边与单位圆交于点 A，若点 A 沿着单位圆顺时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 到 B 点，且 $B\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$，则 $\cos\alpha=$________.

14.等边三角形 ABC 的边长是 2，D，E 分别是 AB 与 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=$________.

15.已知 $(x+1)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_5(x-1)^5$，则 $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=$________.（用数字作答）

16.若不等式 $e^{ax}+(2a-1)x-2\ln x\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\cos B+\sqrt{3}\sin B=\frac{c}{a}$.

（1）求角 A；

（2）若 $a=2$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18.（12 分）已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\frac{a_n}{a_{n+1}}=a_n+2(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）证明：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是等比数列；

（2）若 $b_n=2^n a_n a_{n+1}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<1$.

19.（12 分）杭州第 19 届亚运会，中国代表团共获得 201 金 111 银 71 铜，共 383 枚奖牌，金牌数超越 2010 年广州亚运会的 199 枚，标志着我国体育运动又有了新的突破.某大学从全校学生中随机抽取了 130 名学生，对其日常参加体育运动情况做了调查，其中是否经常参加体育运动的数据统计如下：

	经常参加	不经常参加
男生	60	20
女生	40	10

(1)利用频率估计概率，现从全校女生中随机抽取 5 人，求其中恰有 2 人不经常参加体育运动的概率；

(2)依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的 χ^2 独立性检验，能否认为是否经常参加体育运动与性别有关联.

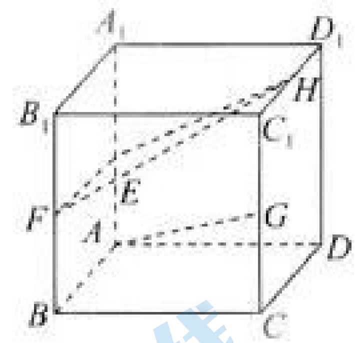
参考公式：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

20.(12 分)正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H 分别是 AA_1，BB_1，CC_1，C_1D_1 的中点.

(1)证明：AG // 平面 EFH；

(2)求 A_1C 与平面 EFH 所成角的正弦值.



21.(12 分)已知函数 $f(x)=a\ln x-\dfrac{1}{x}$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$ 的值域；

(2)若 $f(x)=x$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个实数根，求实数 a 的取值范围.

22.(12 分)已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，$(0,-\sqrt{3})$ 是椭圆上的点.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)设 A 为 C 的左顶点，过 F_2 的直线交椭圆 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 分别交直线 $x=4$ 于 M，N 两点，B 是线段 MN 的中点，在 x 轴上求出一定点 D，使得 $BD\perp PD$.

2024届高三一轮复习联考(五)

数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】易知 $A=\{x\mid x\leqslant 2\}$, $B=\{x\mid -1<x<3\}$, $A\cap B=\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$.故选C.

2. A 【解析】$z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(3-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{5}=1-\mathrm{i}$,则 z 的共轭复数为 $\bar{z}=1+\mathrm{i}$,其所对应的点在第一象限.故选A.

3. B 【解析】$P=1-\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=1-\dfrac{7}{15}=\dfrac{8}{15}$.故选B.

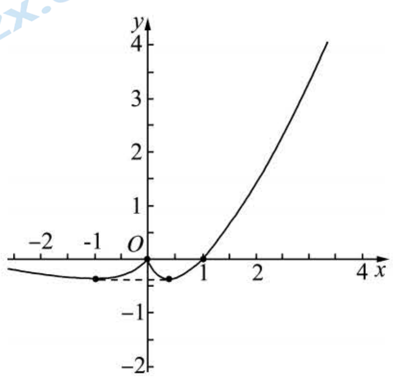
4.B 【解析】设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,令 $f'(x)>0$ 得 $0<x<\mathrm{e}$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增.因为 $\sqrt{3}<2<\mathrm{e}$,所以 $f(\sqrt{3})<f(2)<f(\mathrm{e})$,即 $\dfrac{\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\dfrac{\ln 3}{2\sqrt{3}}<\dfrac{\ln 2}{2}<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,不等式两边同乘2得 $\dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\ln 2<\dfrac{2}{\mathrm{e}}$,即 $b<a<c$.故选B.

5.A 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, $\{b_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{b_3-b_2}{b_2-b_1}=\dfrac{a_{11}-a_5}{a_5-a_2}=\dfrac{6d}{3d}=2$.故选A.

6.C 【解析】$AF=6$,由抛物线定义可知 A 到准线距离为6,即 $4+\dfrac{p}{2}=6$,解得 $p=4$,不妨设 $A(4,4\sqrt{2})$, $F(2,0)$,所以 AF: $y=2\sqrt{2}(x-2)$,与抛物线联立,消去 y 整理得 $x^2-5x+4=0$,解得 $x_1=4$, $x_2=1$,则 $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2$.故选C.

7.B 【解析】由对称性可知 $S_{\text{四边形}PACB}=2S_{\triangle PAC}$, $S_{\triangle PAC}=\dfrac{1}{2}PA\cdot AC$,圆 C 的圆心为 $(2,-1)$,半径 $AC=1$, $PA^2+AC^2=PC^2$, PC 的最小值为圆心到直线的距离,即 $\dfrac{3\times 2-4\times(-1)+5}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$,故 PA 的最小值为 $2\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle PAC}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$,四边形 $PACB$ 面积的最小值为 $2\sqrt{2}$.故选B.

8.A 【解析】$x\leqslant 0$ 时, $f'(x)=(1+x)\mathrm{e}^x$,当 $x<-1$ 时 $f'(x)<0$,当 $-1<x\leqslant 0$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递减,在 $(-1,0]$ 单调递增. $x>0$ 时, $f'(x)=\ln x+1$,当 $0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)<0$,当 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 单调递增, $f(-1)=f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.画出函数 $f(x)$ 的图象,如下图所示,函数最小值为 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $f(x)=t$ 有四个不同的实数根,数形结合可知 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<t<0$, t 的取值范围是 $\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},0\right)$,故选A.



9.ACD 【解析】由扇形统计图可知青年人占比45%是老年人占比20%的2倍多，A正确.其中满意的青年人占总人数的$0.45\times0.4\times100\%=18\%$，满意的中年人占总人数的$0.35\times0.7\times100\%=24.5\%$，满意的老年人占总人数的$0.2\times0.8\times100\%=16\%$，故B错误C正确，总满意率为$18\%+24.5\%+16\%=58.5\%>50\%$，D正确.故选ACD.

10.AC 【解析】由图象得$A=2$，周期$T=8$，$\frac{2\pi}{\omega}=8$，得$\omega=\frac{\pi}{4}$，所以$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$，$f(1)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=0$，$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore \varphi=\frac{3}{4}\pi$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{3}{4}\pi\right)$.令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{4}x+\frac{3}{4}\pi\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-5+8k\leqslant x\leqslant-1+8k$，$k\in\mathbf{Z}$，故单调递增区间为$[-5+8k,-1+8k]$，$k\in\mathbf{Z}$.A正确，B错误；令$\frac{\pi}{4}x+\frac{3}{4}\pi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$x=4k-3$，令$-2\pi\leqslant4k-3\leqslant2\pi$得$\frac{3-2\pi}{4}\leqslant k\leqslant\frac{3+2\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$k=0,1,2$，可知C选项正确；函数图象关于直线$x=3$对称，向左平移3个单位长度，图象关于$y$轴对称，得到的函数为偶函数，故D错误.故选AC.

11.BC 【解析】A选项，A_1P与AD_1所成角等价于A_1P与BC_1所成的角，当P为BC_1中点时，$A_1P\perp BC_1$，此时所成角最大，为$\frac{\pi}{2}$，A选项错误.B选项，过P作BC的垂线交BC于P'，若$PE=PD$，则$P'E=P'D$，显然存在，B选项正确.C选项，因为P到平面AA_1D的距离不变，三角形AA_1D面积不变，故体积为定值，C选项正确.D选项，P所在的轨迹是以A_1为圆心，1为半径的弧B_1D_1，轨迹长度是$\frac{\pi}{2}$，D选项错误.故选BC.

12. BC 【解析】由$f(x-2)=f(-x)$可知$f(x)$的图象关于直线$x=-1$对称，C正确，所以$f(-x-2)=f(x)$，则$g(x+3)+g(x+1)=4$①，令x为$-x-2$，$f(-x-2)+g(-x+1)=3$，则$g(-x+1)+g(x+1)=4$②，$g(x)$的图象关于点$(1,2)$对称，$g(1)=2$，$g(3)=2$，故B正确；由①②可知$g(x+3)=g(-x+1)$，所以$g(x)$的图象关于直线$x=2$对称，故A错误，所以4是$g(x)$的周期，由$f(-1)=2$，$f(-1)+g(2)=3$，得$g(2)=1$，令$x=-1$，由①得$g(0)=3$，4是$g(x)$的周期，$g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=8$，$\sum\limits_{m=0}^{2\,023}g(m)=g(0)+g(1)+\cdots+g(2\,023)$有2 024项，故$\sum\limits_{m=0}^{2\,023}g(m)=4\,048$，故D错误.故选BC.

13. $\frac{\sqrt{2}-4}{6}$ 【解析】由三角函数定义可知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}-4}{6}$.

14. $\frac{3}{2}$ 【解析】$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{4}\times2\times2\times\cos60^\circ+\frac{1}{4}\times2^2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

15.405 【解析】$(x+1)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_5(x-1)^5$两边求导得：$5(x+1)^4=a_1+2a_2(x-1)+\cdots+5a_5(x-1)^4$，令$x=2$，可得$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=5\times3^4=405$.

16. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ 【解析】令$F(x)=e^x+2x$，可知$F(x)$单调递增，$e^{ax}+(2a-1)x-2\ln x\geqslant0$恒成立，则$e^{ax}+2ax\geqslant x+2\ln x$，即$F(ax)\geqslant F(\ln x)$，$a\geqslant\frac{\ln x}{x}$恒成立，令$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$x\in(0,e)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当$x\in(e,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，所以$g(x)$的最大值为$g(e)=\frac{1}{e}$，则$a\geqslant\frac{1}{e}$，故$a$

的取值范围是$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

17.**解**:(1)由正弦定理得 $\cos B+\sqrt{3}\sin B=\frac{\sin C}{\sin A}$, ………………………………………… 1 分

即 $\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin A\sin B=\sin(A+B)$,

所以$\sqrt{3}\sin A\sin B=\cos A\sin B$, ………………………………………… 3 分

因为 $\sin B\neq 0$,

所以 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ………………………………………… 4 分

又因为 $A\in(0,\pi)$,

所以 $A=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………… 5 分

(2)由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得

$4=b^2+c^2-\sqrt{3}bc\geqslant(2-\sqrt{3})bc$, ………………………………………… 6 分

所以 $bc\leqslant 8+4\sqrt{3}$,当且仅当 $b=c$ 时取到等号, ………………………………………… 8 分

故△ABC 面积的最大值为 $S=\frac{1}{2}\times(8+4\sqrt{3})\sin A=2+\sqrt{3}$. ………………………………………… 10 分

18. **证明**:(1)$\because \frac{a_n}{a_{n+1}}=a_n+2$,

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$,即$\frac{1}{a_{n+1}}+1=\frac{2}{a_n}+2$, ………………………………………… 2 分

$\therefore \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+1}{\frac{1}{a_n}+1}=2$, ………………………………………… 4 分

又$\frac{1}{a_1}+1=2$, ………………………………………… 5 分

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列. ………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知$\frac{1}{a_n}+1=2^n$,所以 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$, ………………………………………… 7 分

$b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$, ………………………………………… 9 分

$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$, ………………………………………… 11 分

因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以显然 $S_n<1$. ………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)女生不经常参加体育运动的概率 $p=\frac{10}{40+10}=\frac{1}{5}$, ………………………………………… 3 分

从全校女生中随机抽取 5 人,不经常参加体育运动的人数 X 服从二项分布,则

$P(X=2)=C_5^2\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^3=\frac{128}{625}$. ………………………………………… 6 分

(2)零假设为 H_0:"性别与是否经常参加体育运动独立",即性别与是否经常参加体育运动无关联, ……… 8 分

根据表中数据,经计算得到

$\chi^2=\frac{130(60\times10-20\times40)^2}{80\times50\times100\times30}\approx0.433<2.706=x_{0.1}$， …………………………………………………… 10 分

依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的 χ^2 独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此认为 H_0 成立，即认为是否经常参加体育运动与性别没有关联. …………………………………………………… 12 分

20.(1)**证明**：因为 $C_1D_1\parallel EF$，$H\in C_1D_1$，

所以平面 EFH 与平面 EFC_1D_1 是同一平面. …………………………………………………… 1 分

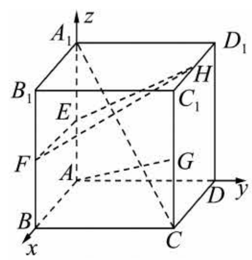
因为 $AE\parallel GC_1$ 且 $AE=GC_1$，

所以 AEC_1G 是平行四边形，则 $AG\parallel EC_1$. …………………………………………………… 3 分

又 $EC_1\subset$ 平面 EFH，$AG\not\subset$ 平面 EFH，

所以 $AG\parallel$ 平面 EFH. …………………………………………………… 5 分

(2)**解**：设正方体的棱长是 2，以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴正方向，AD 为 y 轴正方向，AA_1 为 z 轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$E(0,0,1)$，$F(2,0,1)$，$H(1,2,2)$，$A_1(0,0,2)$，$C(2,2,0)$，

$\overrightarrow{EF}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{EH}=(1,2,1)$，$\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$. …………………………………… 8 分

设平面 EFH 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=2x=0,\\ \overrightarrow{EH}\cdot\boldsymbol{n}=x+2y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,1,-2)$， …………………………………… 10 分

设 A_1C 与平面 EFH 所成角为 θ，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1C},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1C}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1C}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2+4}{\sqrt{2^2+2^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5},$$

所以 A_1C 与平面 EFH 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. …………………………………………………… 12 分

21.**解**：(1) $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. ………… 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

则 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增，…………………………………………………… 3 分

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值，同时也是最小值，最小值 $f(1)=1$，又 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $[1,+\infty)$. …………………………………………………… 4 分

(2) $f(x)=x$ 在 $[1,+\infty)$ 有两个实数根，则 $g(x)=a\ln x+\frac{1}{x}-x$ 在 $[1,+\infty)$ 有两个零点.

$g'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$，令 $h(x)=-x^2+ax-1(x\geqslant1)$，当 $\Delta=a^2-4\leqslant0$ 时，

$h(x)\leqslant0$ 恒成立，$g'(x)\leqslant0$，$g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，舍去. …………………………………… 6 分

当 $\Delta=a^2-4>0$ 时，解得 $a>2$ 或 $a<-2$，$h(x)$ 有两个根 x_1,x_2，且 $x_1x_2=1$，$x_1+x_2=a$，

当 $a<-2$ 时，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒小于 0，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，舍去. ………………………… 7 分

当 $a>2$ 时，$x_1\cdot x_2=1$，$x_1+x_2>2$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $0<x_1<1<x_2$，

$x\in(1,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

$x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$g(1)=0$，则 $g(x_2)>0$，由函数 $y=\ln x$ 和函数 $y=\sqrt{x}$ 的图象知，

当 $x>1$ 时，$\ln x<\sqrt{x}$，$\frac{1}{x}<1$，$g(x)=a\ln x+\frac{1}{x}-x<a\sqrt{x}+1-x$， …………………………………… 9 分

$g(4a^2)<a\sqrt{4a^2}+1-4a^2=1-2a^2<0$，且 $4a^2>1$，

故 $\exists x_0\in(1,4a^2)$ 使 $g(x_0)=0$，故 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上存在两个零点. …………………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $(2,+\infty)$. …………………………………… 12 分

22.**解**：(1)由椭圆过 $(0,-\sqrt{3})$ 可知 $b=\sqrt{3}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，解得 $a^2=4$，$b^2=3$，…………………………………… 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………… 4 分

(2)由题知，D 在以 BP 为直径的圆上.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 PQ：$x=my+1$，代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，整理得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

$\Delta=36m^2+36(3m^2+4)>0$，$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. …………………………………… 6 分

因为 $A(-2,0)$，

易知 AP：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=4$，得 $M\left(4,\frac{6y_1}{x_1+2}\right)$，同理 $N\left(4,\frac{6y_2}{x_2+2}\right)$，

则 MN 中点 $B\left(4,3\left(\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)\right)$. …………………………………… 7 分

以 BP 为直径的圆的方程为 $(x-4)(x-x_1)+\left(y-3\left(\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)\right)(y-y_1)=0$，

令 $y=0$ 得 $(x-4)(x-x_1)+3y_1\left(\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)=0$， …………………………………… 8 分

$$\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1}{my_1+3}+\frac{y_2}{my_2+3}=\frac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2+3m(y_1+y_2)+9}=\frac{2m\cdot\frac{-9}{3m^2+4}+3\cdot\frac{-6m}{3m^2+4}}{m^2\cdot\frac{-9}{3m^2+4}+3m\cdot\frac{-6m}{3m^2+4}+9}=\frac{-36m}{36}=$$

$-m$. …………………………………… 10 分

所以 $(x-4)(x-x_1)-3my_1=0$，即 $x^2-(4+x_1)x+4x_1-3my_1=0$，又因为 $x_1=my_1+1$，

所以 $x^2-(5+my_1)x+my_1+4=0$，即 $(x-1)(x-my_1-4)=0$，解得 $x=1$，

所以 D 点坐标为 $(1,0)$. …………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！