北京市西城区 2022—2023 学年度第二学期期末试卷

高一数学

2023.7

本试卷共 6 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数 $z=1+\mathrm{i}$，则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点在

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）下列函数中，最小正周期为 π 且是偶函数的是

（A）$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$　　（B）$y=\tan x$

（C）$y=\cos 2x$　　（D）$y=\sin 2x$

（3）在 $\triangle ABC$ 中，$2a=b$，$C=60^{\circ}$，$c=\sqrt{3}$，则 $a=$

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1

（C）$\sqrt{3}$　　（D）$2\sqrt{3}$

（4）某城市一年中12 个月的月平均气温 y（单位℃）与月份 $x(x=1,2,3,\cdots,12)$ 的关系可近似地用三角函数 $y=a+A\sin[\frac{\pi}{6}(x-3)]$ $(A>0)$ 来表示，已知月平均气温最高值为28℃，最低值为18℃，则 $A=$

（A）5　　（B）10

（C）15　　（D）20

(5) 复数 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，且 z^2 为纯虚数，则 α 可能的取值为

(A) 0　　(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$　　(D) $\frac{\pi}{2}$

(6) 已知直线 m，直线 n 和平面 α，则下列四个命题中正确的是

(A) 若 $m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m//n$　　(B) 若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

(C) 若 $m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则 $m\perp n$　　(D) 若 $m\perp n$，$n//\alpha$，则 $m\perp\alpha$

(7) 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$P(1,-2)$，$Q(3,4)$，则 $\cos\angle POQ=$

(A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(C) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

(8) 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为4，P 为 $\triangle ABC$ 边上的动点，且满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}\leqslant 12$，

则点 P 轨迹的长度是

(A) 7　　(B) 9

(C) 10　　(D) 11

(9) 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$，则“ $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上既不是增函数也不是减函数”

是“ $\omega>1$ ”的

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(10) 已知点 A，点 B，点 P 都在单位圆上，且 $|AB|=\sqrt{3}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围是

(A) $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$　　(B) $[-1,3]$

(C) $[-2,3]$　　(D) $[-1,2]$

第二部分（非选择题共110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）已知复数 z 在复平面内所对应的点的坐标为 $(3,-4)$，则 $\left|\dfrac{5}{z}\right|$ 为____.

（12）设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(4,x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$____.

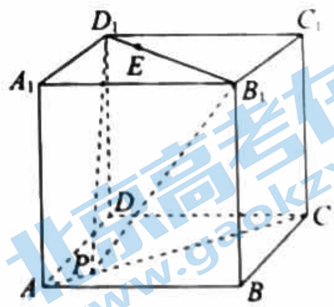
（13）已知圆柱的底面半径为 3，体积为 $\dfrac{32\pi}{3}$ 的球与该圆柱的上、下底面相切，则球的半径为____，圆柱的体积为____.

（14）写出一个同时满足下列两个条件的函数 $f(x)=$____.

①$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+\dfrac{\pi}{2})=f(x)$；

②$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(\dfrac{\pi}{4})$ 恒成立.

（15）如图，在棱长为4的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 AC 上的动点（包含端点），点 E 在线段 B_1D_1 上，且 $D_1E=\dfrac{1}{4}B_1D_1$，给出下列四个结论：



①存在点 P，使得平面 PB_1D_1 // 平面 C_1BD；

②存在点 P，使得 $\triangle PB_1D_1$ 是等腰直角三角形；

③若 $PE\leqslant 5$，则点 P 轨迹的长度为 $2\sqrt{7}$；

④当 $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{1}{3}$ 时，平面 PB_1D_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得截面图形的面积为18.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

已知 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ ，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

（Ⅰ）求 $\tan\alpha$ 的值；

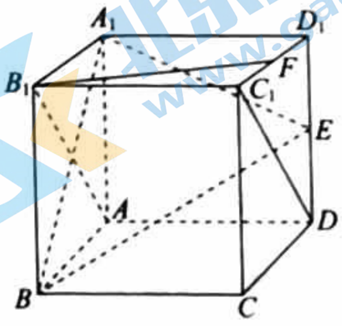
（Ⅱ）求 $\frac{\cos 2\alpha}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}$ 的值.

（17）（本小题13分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是棱 DD_1，C_1D_1 的中点.

（Ⅰ）证明：$A_1B\perp$ 平面 ADC_1B_1；

（Ⅱ）证明：$B_1F\,//$ 平面 A_1BE.



（18）（本小题 14 分）

已知在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B+b\cos A=2c\cos A$.

（Ⅰ）求 A 的大小；

（Ⅱ）若 $c=4$，在下列三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一，求 $\triangle ABC$ 的周长.

①$\triangle ABC$ 的面积为 $5\sqrt{3}$；②$a=\sqrt{13}$；③AB 边上的高线 CD 长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（19）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2 x-1$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{6})$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上有且只有两个零点，求 m 的取值范围.

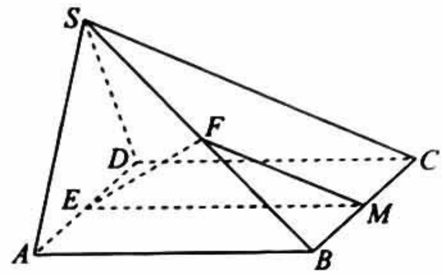
（20）（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，$SA=SD=AD=2$，四边形 $ABCD$ 为正方形，E 为 AD 的中点，F 为 SB 上一点，M 为 BC 上一点，且平面 EFM // 平面 SCD.

（Ⅰ）求证：$CD\perp SA$；

（Ⅱ）求证：M 为线段 BC 中点，并直接写出 M 到平面 SCD 的距离；

（Ⅲ）在棱 SC 上是否存在点 N，使得平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$？若存在，求 $\dfrac{CN}{CS}$；若不存在，说明理由.



（21）（本小题 15 分）

对于定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和正实数 T，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+T)-f(x)=T$，则称 $f(x)$ 为 $T-$阶梯函数.

（Ⅰ）分别判断下列函数是否为 $1-$阶梯函数（直接写出结论）：

① $f(x)=x^2$；② $f(x)=x+1$.

（Ⅱ）若 $f(x)=x+\sin x$ 为 $T-$阶梯函数，求 T 的所有可能取值；

（Ⅲ）已知 $f(x)$ 为 $T-$阶梯函数，满足：$f(x)$ 在 $[\frac{T}{2},T]$ 上单调递减，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(T-x)-f(x)=T-2x$. 若函数 $F(x)=f(x)-ax-b$ 有无穷多个零点，记其中正的零点从小到大依次为 $x_1,x_2,x_3,\cdots$

直接给出一个符合题意的 a 的值，并证明：存在 $b\in\mathbf{R}$，使得 $F(x)$ 在 $[0,2023T]$ 上有 4046 个零点，且 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_{4046}-x_{4045}$.

北京市西城区 2022—2023 学年度第二学期期末试卷

高一数学答案及评分参考

2023.7

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

（1）D　（2）C　（3）B　（4）A　（5）B

（6）C　（7）D　（8）B　（9）B　（10）A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）1　（12）-2　（13）2，36π

（14）$|\sin 2x|$（答案不唯一）　（15）①③④

注：第 13 题第一问 2 分，第二问 3 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，　……………………1 分

所以 $\cos^2\alpha=\dfrac{9}{25}$，$\cos\alpha=\pm\dfrac{3}{5}$.　……………………3 分

又因为 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$.　……………………5 分

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$.　……………………7 分

（Ⅱ）$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}$　……………………11 分

$=\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.　……………………13 分

（17）（本小题 13 分）

（Ⅰ）证明：因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

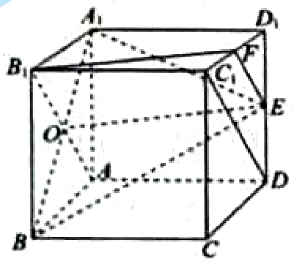
所以 $B_1C_1\perp$ 平面 ABB_1A_1.

因为 $A_1B\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $B_1C_1\perp A_1B$.　……………………2 分

因为 A_1ABB_1 为正方形，

所以 $A_1B\perp AB_1$，　……………………4 分



又因为 $B_1C_1 \cap AB_1 = B_1$，所以 $A_1B \perp$ 平面 ADC_1B_1. ……………………6 分

（Ⅱ）设 $AB_1 \cap A_1B = O$，连接 OE.

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

所以 $B_1A // C_1D$，且 $B_1A = C_1D$，

所以 $B_1O // C_1D$，且 $B_1O = \frac{1}{2}C_1D$. ……………………8 分

因为 E，F 分别 DD_1，C_1D_1 的中点，

所以 $EF // C_1D$，且 $EF = \frac{1}{2}C_1D$. ……………………10 分

所以 $EF // B_1O$，且 $EF = B_1O$.

所以四边形 B_1OEF 为平行四边形.

所以 $B_1F // OE$. ……………………12 分

又因为 $B_1F \not\subset$ 平面 A_1BE，$OE \subset$ 平面 A_1BE，

所以 $B_1F //$ 平面 A_1BE. ……………………13 分

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$，

得 $\sin A\cos B + \sin B\cos A = 2\sin C\cos A$. ……………………2 分

所以 $\sin(A+B) = 2\sin C\cos A$. ……………………4 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(A+B)=\sin C$， ……………………5 分

所以 $\sin C = 2\sin C\cos A$.

因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C \neq 0$，

所以 $2\cos A = 1$，即 $\cos A = \frac{1}{2}$. ……………………6 分

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A = \frac{\pi}{3}$. ……………………7 分

（Ⅱ）选择① ……………………8 分

因为 $S_{\triangle ABC} = 5\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}bc\sin A = 5\sqrt{3}$， ……………………9 分

即 $\frac{1}{2}\times b\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

所以 $b=5$. ……………………10 分

又因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$，即 $a^2 = 25+16-2\times5\times4\times\frac{1}{2}$， ……………………12 分

所以 $a=\sqrt{21}$. ……………………13 分

所以$\triangle ABC$的周长为$9+\sqrt{21}$. ……14 分

选择③ ……8 分

因为AB边上的高线CD长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $b\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……9 分

所以$b=1$. ……10 分

又因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$a^2=1+16-2\times1\times4\times\frac{1}{2}$. ……12 分

所以$a=\sqrt{13}$. ……13 分

所以$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{13}$. ……14 分

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}+2\cos^2\frac{\pi}{6}-1=1$. ……2分

（Ⅱ）$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2x-1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x+\cos2x$ ……4 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ ……6 分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， ……8 分

得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$.

所以$f(x)$的单调递增区间是$[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi](k\in\mathbf{Z})$. ……9 分

（Ⅲ）因为$x\in[0,m]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}]$. ……11 分

依题意$2\pi\leqslant2m+\frac{\pi}{6}<3\pi$. ……13 分

解得$\frac{11\pi}{12}\leqslant m<\frac{17\pi}{12}$.

所以m的取值范围为$[\frac{11\pi}{12},\frac{17\pi}{12})$. ……15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为四边形$ABCD$为正方形，所以 $CD\perp AD$.

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CD\perp$ 平面 SAD． ……………………2 分

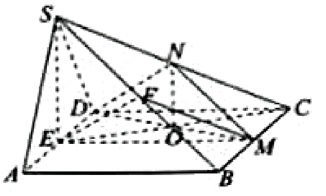
又 $SA\subset$ 平面 SAD，

所以 $CD\perp SA$． ……………………4 分

（Ⅱ）因为平面 EFM // 平面 SCD，平面 $EFM\cap$ 平面 $ABCD=EM$，

平面 $SCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

所以 CD // EM， ……………………6 分



又因为 E 为 AD 的中点，

所以 M 为线段 BC 中点． ……………………7 分

M 到平面 SCD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………9 分

（Ⅲ）存在，N 为 SC 中点． ……………………10 分

连接 EC、DM 交于点 O，连接 SE．

因为 ED // CM，并且 $ED=CM$，

所以四边形 $EMCD$ 为平行四边形，所以 $EO=CO$．

又因为 N 为 SC 中点，

所以 NO // SE． ……………………11 分

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

又 $SE\subset$ 平面 SAD，由已知 $SE\perp AD$，

所以 $SE\perp$ 平面 $ABCD$， ……………………12 分

所以 $NO\perp$ 平面 $ABCD$， ……………………13 分

又因为 $NO\subset$ 平面 DMN，

所以平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$． ……………………14 分

所以存在点 N，使得平面 $DMN\perp$ 平面 $ABCD$，$\dfrac{CN}{CS}=\dfrac{1}{2}$． ……………………15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）① 否；②是． ……………………4 分

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 为 $T-$ 阶梯函数，所以对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有：

$$f(x+T)-f(x)=[x+T+\sin(x+T)]-(x+\sin x)=\sin(x+T)-\sin x+T，$$

……………………6 分