

数 学

一. 选择题

1. 已知全集 $U = \{x/x > 0\}$, $M = \{x/x > 1\}$, 则 $C_U M =$ ()

- A. $\{x/x \leq 1\}$ B. $\{x/0 < x \leq 1\}$ C. $\{x/x \geq 0\}$ D. $\{x/x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\}$

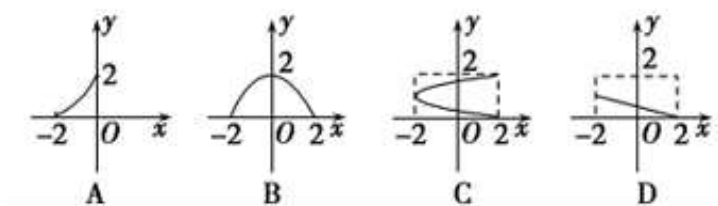
2. 已知命题 $p: \exists x < 1, x^2 \leq 1$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x \geq 1, x^2 > 1$ B. $\exists x < 1, x^2 > 1$ C. $\forall x < 1, x^2 > 1$ D. $\exists x \geq 1, x^2 > 1$

3. 当 $x \in [0, 5]$ 时, 函数 $f(x) = 3x^2 - 4x$ 的值域为 ()

- A. $[0, 55]$ B. $[-\frac{4}{3}, 0]$ C. $[-\frac{4}{3}, 55]$ D. $[0, 20]$

4. 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $M = \{x/-2 \leq x \leq 2\}$, 值域为 $N = \{y/0 \leq y \leq 2\}$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是 ()



5. 下列函数中既是奇函数, 又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的函数为 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = -x^2$ C. $y = |x|$ D. $y = \frac{x}{x+1}$

6. 若实数 a, b 满足 $a > 0, b > 0$, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. “ $x > 0, y > 0$ ” 是 “ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知正实数 x, y 满足 $2x + y = 3$, 则 xy 的最大值是 ()

- A. 1 B. 2 C. $\frac{9}{8}$ D. $\frac{5}{4}$

9. 若偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数, 则下列关系式中成立的是 ()

A. $f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(-1) < f(2)$ B. $f(-1) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(2)$

C. $f(2) < f(-1) < f\left(-\frac{3}{2}\right)$ D. $f(2) < f\left(-\frac{3}{2}\right) < f(-1)$

10. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 2$, 那么不等式 $f(x) < \frac{1}{2}$ 的解集是 ()

A. $\{x/0 < x < \frac{5}{2}\}$ B. $\{x/-\frac{3}{2} < x < 0\}$

C. $\{x/-\frac{3}{2} < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < \frac{5}{2}\}$ D. $\{x/x < -\frac{3}{2} \text{ 或 } 0 \leq x < \frac{5}{2}\}$

11. 函数 $f(x)$ 是定义在 R , “ $f(x)$ 是奇函数”是“存在 $x \in R, f(x) + f(-x) = 0$ ”的 ()

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 如果 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 那么下列函数中, 一定偶函数的是 ()

A. $y = x + f(x)$ B. $y = xf(x)$ C. $y = x^2 + f(x)$ D. $y = x^2 f(x)$

13. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1, & x > 0 \\ 3x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $y = f(x)$ 的图象上关于原点 O 对称的点共有 ()

A. 0对 B. 1对 C. 2对 D. 3对

14. 某码头有总重量为 13.5 吨的一批货箱, 对于每个货箱重量都不超过 0.35 吨的任何情况, 都要一次运走这批货箱, 则至少需要准备载重 1.5 吨的卡车 ()

A. 12 辆 B. 11 辆 C. 10 辆 D. 9 辆

15. 函数 $f(x) = x, g(x) = x^2 - x + 3$. 若存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \frac{9}{2}]$, 使得

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + g(x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1}) + f(x_n),$$
 则 n 的最大值为 ()

A. 5 B. 63 C. 7 D. 8

二. 填空题

16. 若集合 $\{a, 0, 1\} = \{0, \frac{1}{b}, -1\}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 能够说明“设 a, b, c 是任意实数, 若 $a > b > c$, 则 $a + b > c$ ”是假命题的一组整数 a, b, c 的值依次为 .

18. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} (x > 0)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$, 那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

19. 已知函数 $f(x) = (x + t)(x + 1)$ 是偶函数, 则 $t = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 且 $x + y = 1$, 则 $x^2 + y^2$ 的取值范围是 .

21. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq a \\ x^2 - 2x, & x > a \end{cases}$,

(1) 若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的单增区间为_____;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 的值域为 R , 则 a 的取值范围是_____.

22. 一辆赛车在一个周长为 $3km$ 的封闭跑道上行驶, 跑道由几段直道和弯道组成, 图①反映了赛车在“计时赛”整个第二圈的行驶速度与行驶路程之间的关系.

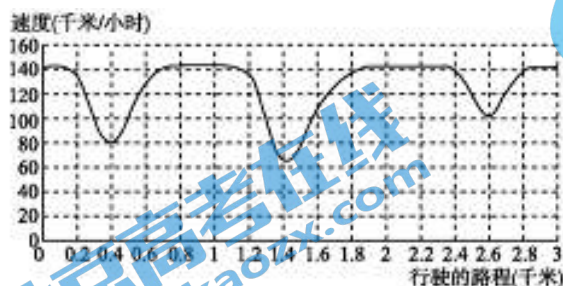


图1

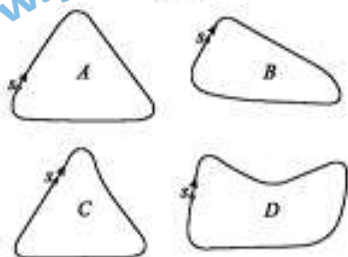


图2

根据图①, 有以下四个说法:

- ① 在这第二圈的 $2.6km$ 到 $2.8km$ 之间, 赛车速度逐渐增加;
- ② 在整个跑道中, 最长的直线路程不超过 $0.6km$;
- ③ 大约在这第二圈的 $0.4km$ 到 $0.6km$ 之间, 赛车开始了最长直线路程的行驶;
- ④ 在图②的四条曲线 (注: S 为初始记录数据位置) 中, 曲线 B 最能符合赛车的运动轨迹.

其中, 所有正确说法的序号是_____.

三. 解答题

23. 已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x \mid |x - 5| \leq 3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 7x + 6 \geq 0\}$, $C = (a, a + 2)$.

(1) 求 $A \cup B$, $(C \cup A) \cap B$;

(2) 若 $B \cap C = \emptyset$, 试求实数 a 的取值范围.

24. 有一种新型的洗衣液，去污速度特别快，已知每投放 k 个($1 \leq k \leq 4$ ，且 $k \in R$)单位的洗衣液在装有一定量水的洗衣机中，它在水中释放的浓度 y (克/升) 随着时间 x (分钟) 变化的函数关系式近似为 $y = k \cdot f(x)$ ，其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{24}{8-x} - 1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 7 - \frac{1}{2}x, & 4 < x \leq 14 \end{cases}$$

若多次投放，则某一时刻水中的洗衣液浓度为每次投放的洗衣液在相应时刻所释放

的浓度之和. 根据经验，当水中洗衣液浓度不低于 4 克/升时，它才能起到有效去污的作用.

(1) 若只投放一次 k 个单位的洗衣液，当两分钟时水中洗衣液的浓度为 3 克/升，求 k 的值；

(2) 若只投放一次 4 个单位的洗衣液，则有效去污时间可达几分钟？

(3) 若第一次投放 2 个单位的洗衣液，10 分钟后再投放 1 个单位的洗衣液，则在第 12 分钟时洗衣液是否还能起到有效去污的作用？请说明理由.

25. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = x^2 + 2x$.

(1) 写出函数 $y = f(x)$ 的解析式和单调减区间；

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - 2ax + 2$ ， $x \in [1, 2]$ ，求函数 $y = g(x)$ 的最小值.