中国人民大学附属中学 2018 届高三八月摸底统一练习

数学（文）测试

2017.8

第一部分 （选择题　共 40 分）

一、选择题(本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分,在每小题列出的四个选项中,只有一个是符合题目要求的,请把所选答案前的字母按规定要求填涂在“答题纸”第 1-8 题的相应位置上.)

1. 设集合 $A=\{x\mid -\frac{1}{2}<x<2\}$, $B=\{x\mid x^2\le 1\}$,则 $A\cup B=$

（A） $\{x\mid -1\le x<2\}$　　（B） $\{x\mid -\frac{1}{2}<x\le 1\}$

（C） $\{x\mid x<2\}$　　（D） $\{x\mid 1\le x<2\}$

2. 设 $\vec{m}$, $\vec{n}$ 为非零向量,则“存在正整数 λ ,使得 $\vec{m}=\lambda\vec{n}$ ”是“ $\vec{m}\cdot\vec{n}>0$ ”的

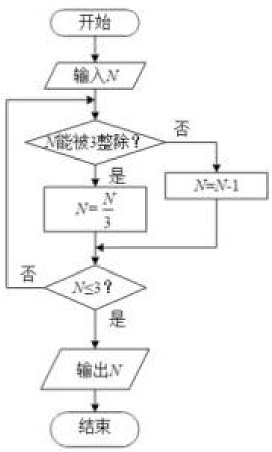
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

3. 阅读下面的程序框图,运行相应的程序,若输入 N 的值为 19,则输出 N 的值为

（A） 0　　（B） 1

（C） 2　　（D） 3

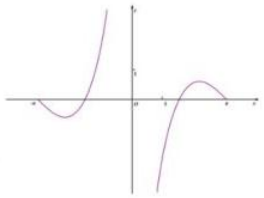
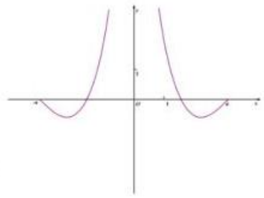


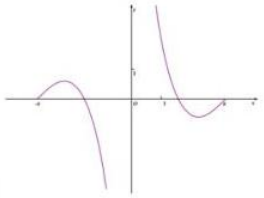
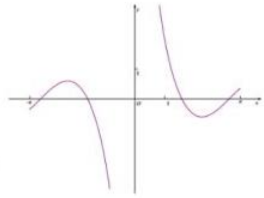
4. 若 x , y 满足约束条件 $\begin{cases}x\ge 0\\ x+y-3\ge 0\\ x-2y\le 0\end{cases}$, $z=x+2y$ 的取值范围是

（A） $[0,6]$　　（B） $[0,4]$

（C） $[6,+\infty)$　　（D） $[4,+\infty)$

5. 函数 $y=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图象大致为

（A）
（B）

（C）
（D）

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $x\geq 4$ 时 $f(x)=(\dfrac{1}{2})^x$，$x<4$ 时 $f(x)=f(x+1)$，则 $f(2+\log_2 3)=$

（A）$\dfrac{1}{12}$　　（B）$\dfrac{1}{24}$　　（C）$\dfrac{1}{8}$　　（D）$\dfrac{3}{8}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{4})$，$(x\in\mathbf{R},\omega>0)$的最小正周期为 π，将 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $|\phi|$ 个单位长度，所得图像关于 y 轴对称，则 ϕ 的一个值是

（A）$\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$\dfrac{3\pi}{8}$　　（C）$\dfrac{\pi}{4}$　　（D）$\dfrac{\pi}{8}$

8. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说，你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说，我还是不知道我的成绩，根据以上信息，则

（A）乙可以知道四人的成绩　　（B）丁可以知道四人的成绩

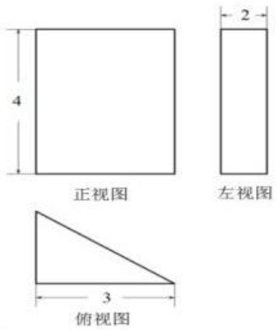
（C）乙、丁可以知道对方的成绩　　（D）乙、丁可以知道自己的成绩

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题(共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分,请将每道题的最简答案填写在“答题纸”第 9-14 题的相应位置上.)

9. 已知复数 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$,则 $|z|=$ ______.

10. 已知某几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积为



______.

11. 已知向量 $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(m,1)$,若向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直,则 $m=$ ______.

12. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c 已知 $C=60^{\circ}$, $b=\sqrt{6}$, $c=3$,则 $A=$ ______.

13. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线 C 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,则曲线 C 的离心率为 ______.

14. 已知函数 $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=ax+2\ (a>0)$,

（Ⅰ）若函数 $y=f(x)-k$ 在 $[-1,2]$ 有两个零点,则实数 k 的取值范围为 ______.

（Ⅱ）对 $\forall x_1\in[-1,2]$, $\exists x_0\in[-1,2]$,使 $f(x_1)=g(x_0)$,则实数 a 的取值范围为 ______.

三、解答题(共 6 小题,共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程,请将解答题的答案填写在“答题纸”第 15-20 题的相应位置上.)

15. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2(\sin x+\cos x)\cos x$

（Ⅰ）求 $f(\frac{5\pi}{4})$ 的值;

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间.

16. （本小题满分 13 分）

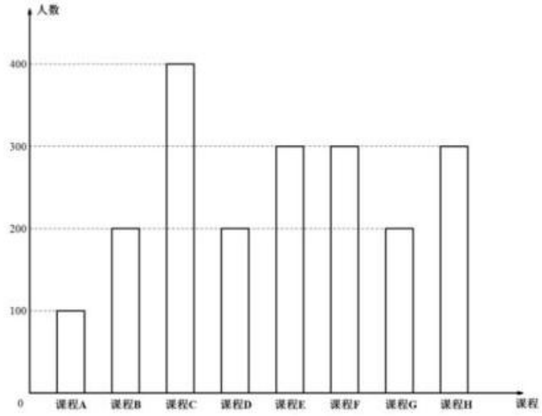
已知 $\{a_n\}$ 是各项为正数的等差数列, S_n 为其前 n 项和,且 $4S_n=(a_n+1)^2$.

（Ⅰ）求 a_1,a_2 的值及 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（Ⅱ）求数列 $\{S_n-\frac{7}{2}a_n\}$ 的最小值.

17. （本小题满分 13 分）

为了响应教育部颁布的《关于推进小学生研学旅行的意见》，某校计划开设八门研学旅行课程，并对全校学生的选课意向进行调查（调查要求全员参与每个学生必须从八门课程中选出唯一一门课程）．本次调查结果如右．



图中，课程 A,B,C,D,E 为人文类课程，课程 F,G,H 为自然科学类课程．为进一步研究学生选课意向，结合上面图表，采取分层抽样方法从学校抽取1% 的学生作为研究样本组（以下简称"组 M"）．

（Ⅰ）在"组 M"中，选择人文类课程和自然科学类课程的人数各有多少？

（Ⅱ）某地举办自然科学营活动，学校要求：参加活动的学生只能是"组 M"中选择 F 课程或 G 课程的同学，并且这些同学以自愿报名缴费的方式参加活动．选择 F 课程的学生中有 x 人参加科学营活动，每人需缴纳 2000 元，选择 G 课程的学生中有 y 人参加科学营活动，每人需缴纳 1000 元．记选择 F 课程和 G 课程的学生自愿报名人数情况为 (x,y)，参加活动的学生缴纳费用总和为 S 元．

（i）当 $S=4000$ 时，写出 (x,y) 的所有可能取值；

（ii）若选择 G 课程的同学都参加科学营活动，求 $S>7000$ 的概率．

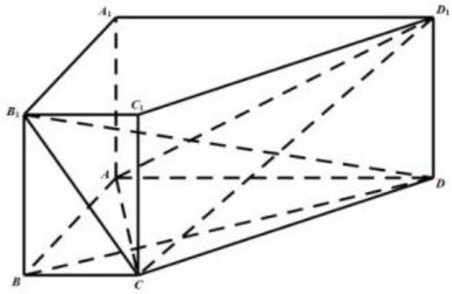
18. （本小题满分 14 分）

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1\perp$ 底面 $ABCD$, $AD//BC$, $\angle BAD=90^\circ$, $AC\perp BD$.

（Ⅰ）求证: $B_1C//$ 平面 ADD_1A_1 ;

（Ⅱ）求证: $AC\perp B_1D$;

（Ⅲ）若 $AD=2AA_1$,判断直线 B_1D 与平面 ACD_1 是否垂直？并说明理由.



19. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=ax\ln x$, $(a\neq 0)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）当 $a<0$ 时,若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$,都有 $f(x)<3ax+1$ 成立,求 a 的取值范围.

20. （本小题满分 14 分）

已知椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,右焦点为 F ,点 $B(0,1)$ 在椭圆上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）过点 F 的直线交椭圆 C 于 M , N 两点,交直线 $x=2$ 于点 P ,设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$,

求证: $\lambda+\mu$ 为定值.

中国人民大学附属中学2018届高三八月份摸底统一练习

高三数学测试答案（文科）

2017.08

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	A	C	D	C	B	D	D

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. $\sqrt{2}$

10. 12

11. 7

12. 75°

13. 2

14. $(-1,0]$;$(0,\frac{1}{2}]$

三、解答题:

15.（本小题满分 13 分）

解:因为 $f(x)=2(\sin x+\cos x)\cos x$

$=2\sin x\cos x+2\cos^2 x$

$=\sin 2x+\cos 2x+1$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$

（I）$f(\frac{5\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(2\times\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4})+1=2$

（II）$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 得,

$2k\pi-\frac{3\pi}{4}\le 2x\le 2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$

所以 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$.

故函数 $f(x)$的单调递增区间为$[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}],k\in\mathbf{Z}$.

16.（本小题满分 13 分）

解:（I）由 $4S_n=(a_n+1)^2$

当 $n=1$ 时, $4S_1=4a_1=(a_1+1)^2$

$\therefore(a_1-1)^2=0$,

$\therefore a_1=1$.

当 $n=2$ 时, $4S_2=4(a_1+a_2)=(a_2+1)^2$

$\therefore(a_2-1)^2=4$,

$\therefore a_2=3$.

$\therefore d=a_2-a_1=2$

$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times2=2n-1$

（II）由 $4S_n=(a_n+1)^2=(2n-1+1)^2=4n^2$

$\therefore S_n=n^2$

设 $b_n=S_n-\frac{7}{2}a_n=n^2-\frac{7}{2}(2n-1)=n^2-7n+\frac{7}{2}$

对称轴为 $n=\frac{7}{2}$,

所以当 $n=3$ 或 4 时, $\{b_n\}$ 取最小值, 且最小值为 $b_3=9-21+\frac{7}{2}=-\frac{17}{2}$.

17.（本小题满分 13 分）

解:（I）选择人文类课程的人数为 $(100+200+400+200+300)\times1\%=12$（人）,

选择自然科学类课程的人数为 $(300+200+300)\times1\%=8$（人）.

（II）(i)当缴纳费用 $S=4000$ 时, (x,y) 只有两种取值情况: $(2,0)$, $(1,2)$;

(ii)设事件 A: 若选择 G 课程的同学都参加科学营活动, 缴纳费用总和 S 超过 7000 元.

在"组 M"中, 选择 F 课程和 G 课程的人数分别为 3 人和 2 人.

因为选择 G 课程的两名同学都参加, 下面考虑选择 F 课程的 3 位同学参加活动的情况.

设每名同学报名参加活动用 a 表示, 不参加活动用 b 表示,

则 3 名同学报名参加活动的情况共有以下 8 种情况: $aaa,aab,aba,baa,abb,bab,bba,bbb$.

当缴纳费用总和 S 超过 7000 元时, 选择 F 课程的 3 名同学都要参加,

仅有如下 1 种情况: aaa.

所以, $S>7000$ 元的概率 $P(A)=\frac{1}{8}$.

18.（本小题满分 14 分）

解:（I）在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1 // AA_1$,

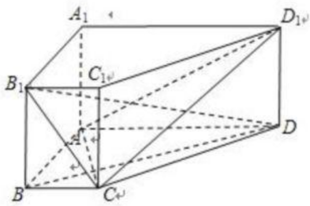
又$\because BC // AD$,

$BB_1 \cap BC = B$, $AA_1 \cap AD = A$

$\therefore$ 平面 $BCC_1B_1 //$ 平面 ADD_1A_1,

又$\because B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1

$\therefore B_1C //$ 平面 ADD_1A_1,



（II）$\because BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$,

$AC \subset$ 底面 $ABCD$,

$\therefore BB_1 \perp AC$,

又$\because AC \perp BD$,

$BB_1 \cap BD = B$,

$\therefore AC \perp$ 平面 BB_1D_1D,

又$\because B_1D \subset$ 平面 BB_1D_1D,

$\therefore AC \perp B_1D$

（III）结论:直线 B_1D 与平面 ACD_1 不垂直.

证明:假设 $B_1D \perp$ 平面 ACD_1,

由 $AD_1 \subset$ 平面 ACD_1 ,得 $B_1D \perp AD_1$.

由棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BB_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $\angle BAD = 90^\circ$,

可得 $A_1B_1 \perp AA_1$, $A_1B_1 \perp A_1D_1$,

又因为 $AA_1 \cap A_1D_1 = A_1$,

所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 AA_1D_1D,

所以 $A_1B_1 \perp AD_1$.

又因为 $A_1B_1 \cap B_1D = B_1$,

所以 $AD_1 \perp$ 平面 A_1B_1D,

所以 $AD_1 \perp A_1D$.

这与四边形 AA_1D_1D 为矩形,且 $AD = 2AA_1$ 矛盾,

故直线 B_1D 与平面 ACD_1 不垂直.

19.（本小题满分 13 分）

解:（I） $f(x)=ax\ln x$,

定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=a\ln x+ax\cdot\frac{1}{x}=a(\ln x+1)$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{e}$,

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$ 得,$x>\frac{1}{e}$;

由 $f'(x)<0$ 得,$0<x<\frac{1}{e}$,

所以 $f(x)$在区间$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增,在区间$(0,\frac{1}{e})$上单调递减;

当 $a<0$ 时,由 $f'(x)>0$ 得,$0<x<\frac{1}{e}$;

由 $f'(x)<0$ 得,$x>\frac{1}{e}$,

所以 $f(x)$在区间$(0,\frac{1}{e})$上单调递增,在区间$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递减;

（II）当 $a<0$ 时,对于任意的 $x\in(0,+\infty)$,都有 $f(x)<3ax+1$ 成立,

$ax\ln x<3ax+1$.

所以 $ax\ln x-3ax-1<0$.

设 $g(x)=ax\ln x-3ax-1$.

因为 $g'(x)=a(\ln x-2)$,

令 $g'(x)=0$,计算得出 $x=e^2$.

因为 $a<0$,

所以随着 x 变化时,$g(x)$和 $g'(x)$的变化情况如下:

x	$(0,e^2)$	e^2	$(e^2,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	极大值	↘

即函数 $g(x)$在$(0,e^2)$上单调递增,在$(e^2,+\infty)$上单调递减,

所以 $g(x)_{\min}=g(e^2)=-ae^2-1$,

所以 $-ae^2-1<0$,

所以 $a>-\frac{1}{e^2}$,

所以 a 的取值范围为$(-\frac{1}{e^2},0)$.

20.（本小题满分 14 分）

解:（I）由点 $B(0,1)$在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上,则 $\frac{1}{b^2}=1$,即 $b=1$

又椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $a^2=b^2+c^2$,得 $a=\sqrt{2}$

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（II）证明:由已知得 $F(1,0)$,直线 MN 的斜率存在.

设直线 MN 的方程为 $y=k(x-1)$,则 $P(2,k)$

联立 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$,

设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$,

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2} \\ x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2} \end{cases}$,

由 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MF}$, $\overrightarrow{PN}=\mu\overrightarrow{NF}$,得 $\lambda=\frac{2-x_1}{x_1-1}$, $\mu=\frac{2-x_2}{x_2-1}$,

$\therefore \lambda+\mu=\frac{2-x_1}{x_1-1}+\frac{2-x_2}{x_2-1}=\frac{3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$,

$\therefore 3(x_1+x_2)-2x_1x_2-4=3\times\frac{4k^2}{1+2k^2}-2\times\frac{2k^2-2}{1+2k^2}-4=\frac{12k^2-4k^2+4-4-8k^2}{1+2k^2}=0$.

$\therefore \lambda+\mu=0$ 为定值.

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao