2016 年北京大学生命科学冬令营试卷数学部分

2017 年 1 月 4 日

注意：所有题目均为单项选择题，共 20 小题．

1. 已知函数 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是严格单调函数，则满足 $f(x)=f\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和是（　　）

A. -1　　B. -3　　C. -5　　D. -8

解析　D.

根据题意，有

$$x=\frac{x+3}{x+4},\ \text{或}\ x=-\frac{x+3}{x+4},$$

即

$$x^2+3x-3=0,\ \text{或}\ x^2+5x+3=0,$$

于是题中方程的所有解之和为 $(-3)+(-5)=-8$．

2. 设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{4},k\in\mathbb{Z}\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{4}k+\dfrac{1}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$，则 A 与 B 的关系是（　　）

A. A 是 B 在有理数集中的补集

B. A 是 B 的真子集

C. B 是 A 的真子集

D. 以上均不对

解析　B.

注　此题来源于 2002 年全国卷的第 5 题：

设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{2}k+\dfrac{1}{4},k\in\mathbb{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{4}k+\dfrac{1}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$，则（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

3. 方程 $x^2-(3a+2)x+2a-1=0$ 的两个实根中一个大于 3，另一个小于 3，则 a 的取值范围是（　　）

A. $a>\dfrac{2}{7}$　　B. $a>\dfrac{2}{9}$　　C. $a<\dfrac{2}{7}$　　D. $a<\dfrac{2}{9}$

解析　A.

设 $f(x)=x^2-(3a+2)x+2a-1$，则问题等价于 $f(3)<0$，解得 $a>\dfrac{2}{7}$．

4. 设实数 a,b,c 均不为 0，且满足 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$，则 $\dfrac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ 的值是（　　）

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. 1　　C. -1　　D. 以上均不对

解析　D.

设 $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}=k$，则

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{1}{k^3}.$$

若 $a-b=0$，则有 $a=b=c$，于是 $k=2$，所求代数式的值为 $\dfrac{1}{8}$；

若 $a-b\neq 0$，则根据合分比定理，有

$$k=\frac{(b+c)-(c+a)}{a-b}=-1,$$

此时 $a+b+c=0$，所求代数式的值为 -1.

5. 设 $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，则 $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}}=$（　　）

A. $\cos\dfrac{\alpha}{2}$　　B. $\sin\dfrac{\alpha}{2}$　　C. $-\cos\dfrac{\alpha}{2}$　　D. $-\sin\dfrac{\alpha}{2}$

解析　C.

显然原式等于 $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|$，而 $\dfrac{3\pi}{4}<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$，于是 $\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$.

6. 设一个圆锥的底面积为 10，它的侧面展开成平面图后为一个半圆，则此圆锥的侧面积是（　　）

A. 10　　B. 20　　C. 30　　D. 40

解析　B.

设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则有

$$\begin{cases}\pi l=2\pi r,\\ \pi r^2=10,\end{cases}$$

从而此圆锥的侧面积为

$$\frac{1}{2}\pi l^2=\frac{1}{2}\pi\cdot 4r^2=20.$$

7. 设 $a\geqslant 1$，且对任意 $x\in[1,2]$，不等式 $x|x-a|+\dfrac{3}{2}\geqslant a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　　C. $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$　　D. 以上均不对

解析　A.

令 $f(x)=x|x-a|+\dfrac{3}{2}$.

情形一　若 $1\leqslant a\leqslant 2$，则

$$f(x)_{\min}=f(a)=\frac{3}{2},$$

故此时 $1\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{2}$.

情形二　若 $a>2$，则 $f(x)=x(a-x)+\dfrac{3}{2}$，此时原问题等价于 $\begin{cases}f(1)\geqslant a,\\ f(2)\geqslant a,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\dfrac{5}{2}$.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $\left[1,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

8. 设 $m>0$，$p:\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q:x^2-2x+1-m^2\leqslant 0$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，则 m 的取值范围是 ( )

A. $[1,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$　　C. $[6,+\infty)$　　D. $[9,+\infty)$

解析　D.

由题意知 p 是 q 的充分不必要条件．$p:-2\leqslant x\leqslant 10$，设 $f(x)=x^2-2x+1-m^2$，则 $f(-2)\leqslant 0$，$f(10)\leqslant 0$ 且 $f(-2)$ 和 $f(10)$ 不同时为 0，解得 $m\geqslant 9$．

9. 设 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，把复数 $z_1=2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ 在复平面上对应的向量按顺时针旋转 $\dfrac{3\pi}{4}$ 后得到的复数为 $z_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，那么 $\tan\varphi=$ ( )

A. $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$　　B. $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$　　C. $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$　　D. $\dfrac{1}{2\tan\theta-1}$

解析　A.

由题意，设 $\arg z=\alpha$，则 $\tan\alpha=\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}$，$\varphi$ 的终边与 $\alpha-\dfrac{3\pi}{4}$ 的终边重合，所以

$$\tan\varphi=\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}.$$

10. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$ 的最大值与最小值的和是 ( )

A. $\dfrac{5}{3}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. 1　　D. $-\dfrac{2}{3}$

解析　B.

方法一　根据题意，当 $x=-1$ 时，有 $f(x)=1$；当 $x\neq -1$ 时，有

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1+\dfrac{1}{x+1}-1},$$

于是 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{5}{3}$，最小值为 -1．

方法二　设 $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$，则有

$$(y-1)x^2+(y+1)x+y+1=0,$$

进而

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)(y+1)=(y+1)(-3y+5)\geqslant 0,$$

于是 y 的最大值为 $\dfrac{5}{3}$，最小值为 -1．

11. 设 m,n 为任意正整数，函数 $f(m,n)$ 的取值也是正整数，且满足 $f(1,1)=1$，$f(m,n+1)=f(m,n)+2$，$f(m+1,1)=2f(m,1)$，则 $f(2016,2015)=$ ( )

A. $2^{2015}+2015$　　B. $2^{2016}+2016$　　C. $2^{2015}+4028$　　D. $2^{2016}+4028$

解析　C.

由题意，

$$f(2016,2015)=f(2016,1)+2\cdot 2014=f(1,1)\cdot 2^{2015}+4028=2^{2015}+4028.$$

12. 设有命题 A,B,C,D,E，其中 A 是 B 的充分条件，B 是 C 的充要条件，$\neg A$ 是 E 的充分条件，D 是 C 的必要条件，则 D 是 $\neg E$ 的（　　）

A. 充分条件　　B. 必要条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　B.

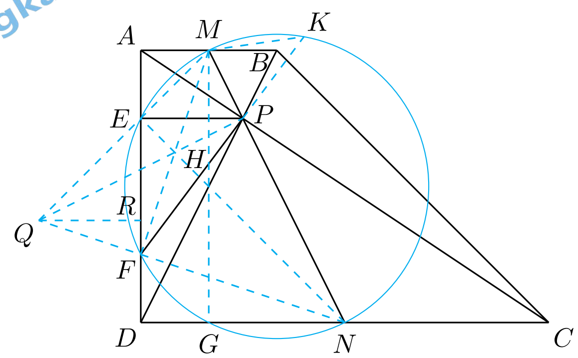
注意 $\neg E$ 是 A 的充分条件，于是有 $\neg E \Rightarrow A \Rightarrow B \Leftrightarrow C \Rightarrow D$.

13. 设直角梯形的高为 2，其两条对角线交点为 P，以它的两底中点的连线为直径的圆与此梯形的直腰相交于点 E 和 F，则 P 到 E 和 F 这两点的距离之和为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. 以上均不对

解析　B.

方法一　如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$，$AD = 2$，$AB = 2a$，$CD = 2b$．$M,N$ 分别为线段 AB,CD 的中点，对角线 AC 与 BD 交于点 P．以 MN 为直径的圆与线段 AD 交于 E,F 两点，与线段 CD 交于 N,G 两点，连接 MG．延长 FP，交圆于点 K，连接 MK．设直线 ME 与 NF 交于点 Q，直线 MF 与 NE 交于点 H，作 $QR \perp AD$ 于 R．



易知，M,P,N 三点共线．因为

$$\frac{ME}{EQ} \cdot \frac{QF}{FN} \cdot \frac{NP}{PM} = \frac{a}{QR} \cdot \frac{QR}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1,$$

故直线 MF,NE,QP 交于一点 H，而 H 是 $\triangle QMN$ 的垂心，所以

$$\angle EFM = \angle ENM = \angle PFH,$$

因而 $\overset{\frown}{ME} = \overset{\frown}{MK}$，进而有 $PE = PK$．因为

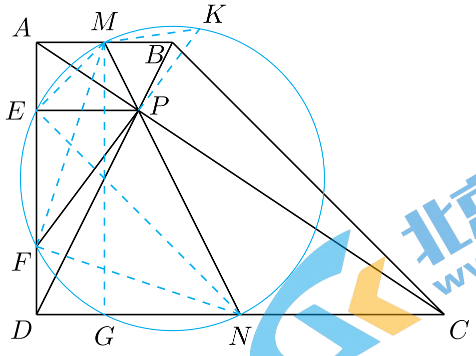
$$\overset{\frown}{FK} = \overset{\frown}{ME} + \overset{\frown}{MK} + \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{ME} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{MG},$$

所以

$$PE + PF = PK + PF = FK = MG = AD = 2.$$

方法二　如图，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$，$AD = 2$．$M,N$ 分别为线段 AB,CD 的中点，对角线 AC 与 BD 交于点 P．以 MN 为直径的圆与线段 AD 交于 E,F

两点，与线段 CD 交于 N,G 两点，连接 MG．延长 FP，交圆于点 K，连接 MK．连接 ME 与 NF．



因为

$$\frac{PM}{PN}=\frac{S_{\triangle PME}}{S_{\triangle PNE}}=\frac{EM\cdot\sin\angle MEP}{EN\cdot\sin\angle NEP},$$

而

$$\frac{PM}{PN}=\frac{AM}{DN}=\frac{EM\cdot\sin\angle MEA}{EN\cdot\sin\angle NED},$$

所以 $\dfrac{\sin\angle MEP}{\sin\angle NEP}=\dfrac{\sin\angle MEA}{\sin\angle NED}$．又因为 $\angle MEP+\angle NEP=90^\circ$，$\angle MEA+\angle NED=90^\circ$，所以

$$\angle MEP=\angle MEA,\ \angle NEP=\angle NED,$$

同理，

$$\angle NFP=\angle NFD,\ \angle MFP=\angle MFA,$$

故 $\overset{\frown}{ME}=\overset{\frown}{MK}$，进而有 $ME=MK$，$PE=PK$．又因为 $\overset{\frown}{KF}=\overset{\frown}{MG}$，所以

$$PE+PF=PK+PF=FK=MG=AD=2.$$

注　若设点 M,N 是以点 P 为焦点，直线 AD 为准线的双曲线上的两点，则此题相当于证明了双曲线的一条性质：若以双曲线的一条焦点弦 MN 为直径的圆与对应准线相交于两点 E,F，则焦点 P 到两个交点 E,F 的距离之和等于焦点弦在准线上的投影长．抛物线也有类似的性质．

14. 一种正十二面体的骰子，12 个表面分别写有 1 到 12 的 12 个数字，则扔一对这样的骰子，可能出现的结果种数是（　　）

A. 144　　B. 132　　C. 72　　D. 78

解析　D.

$\mathrm{C}_{12}^1+\mathrm{C}_{12}^2=78$．

15. 设实数 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{2016}>1$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{2016}=2018$，则 $\ln(x_1)\ln(x_{2016})$ 与 $\dfrac{1}{2015}$ 的大小关系是（　　）

A. $\ln(x_1)\ln(x_{2016})>\dfrac{1}{2015}$　　B. $\ln(x_1)\ln(x_{2016})=\dfrac{1}{2015}$

C. $\ln(x_1)\ln(x_{2016})<\dfrac{1}{2015}$　　D. 以上都有可能

解析　C.

令 $t_i = x_i - 1 > 0\,(i = 1, 2, \cdots, 2016)$，则

$$\ln x_1 \ln x_{2016} = \ln(1 + t_1) \ln(1 + t_{2016}) < t_1 \cdot t_{2016} \leqslant t_1 \cdot \frac{2 - t_1}{2015} \leqslant \frac{1}{2015}.$$

16. 设角 $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$，则 $\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha$ 的值为 (　　)

A. $\dfrac{7}{4}$　　B. 1　　C. $\dfrac{7}{8}$　　D. 以上均不对

解析　A.

由半角公式得

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha),$$

记 $A = \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha$，则有

$$2\sin 2\alpha \cdot A = \sin 4\alpha + (\sin 6\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 8\alpha - \sin 4\alpha).$$

而 $\sin 6\alpha + \sin 8\alpha = 0$，所以

$$2\sin 2\alpha \cdot A = -\sin 2\alpha \Rightarrow A = -\frac{1}{2},$$

从而得所求代数式的值为 $\dfrac{7}{4}$.

17. 已知 $x > 0$ 时，不等式 $[(a-1)x - 1](x^2 - ax - 1) \geqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A. $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{3}{2}$　　B. $1 \leqslant a \leqslant \dfrac{3}{2}$

C. $a = \dfrac{3}{2}$　　D. 不存在这样的 a

解析　C.

分别考虑直线 $y = (a-1)x - 1$ 与二次函数 $y = x^2 - ax - 1$ 的草图，因为二次函数一定存在一个正零点与一个负零点，所以直线斜率为正，且直线与 x 轴的交点必与二次函数的正零点重合，即 $\dfrac{1}{a-1}$ 是方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的解，代入解得 $a = \dfrac{3}{2}$.

也可以考虑不等式，显然有 $a > 1$，题中不等式可以变形为

$$\left(x - \frac{1}{a-1}\right)(x - x_1)(x - x_2) \geqslant 0,$$

其中 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax - 1 = 0$ 的两根，因为 $x_1 x_2 < 0$，不妨设 $x_1 < x_2$，就有 $x_1 < 0 < x_2$. 而 $x > 0$，所以 $x - x_1 > 0$ 恒成立，从而不等式 $\left(x - \dfrac{1}{a-1}\right)(x - x_2) \geqslant 0$ 对 $x > 0$ 恒成立，因为 $\dfrac{1}{a-1} > 0, x_2 > 0$，所以只能有 $\dfrac{1}{a-1} = x_2$，以下同上.

18. 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\beta = 2\cos(\alpha + \beta)\sin\alpha$，则 $\tan\beta$ 具有 (　　)

A. 最大值 $\sqrt{3}$　　B. 最小值 $\sqrt{3}$

C. 取不到最大或最小值　　D. 以上均不对

解析　D.

因为

$$\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

所以由题中条件得 $\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$. 从而解得

$$\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{3\tan^2\alpha+1}=\frac{2}{3\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

即 $\tan\beta$ 有最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$ 时取到. $\tan\beta$ 取不到最小值, 当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan\beta\to 0$.

19. 设实数 a,b,c 满足 $a,b,c\geqslant 1$ 且 $ab\sqrt{c-1}+ac\sqrt{b-1}+bc\sqrt{a-1}=\frac{3}{2}abc$, 则 a,b,c 之间的大小关系是 (　　)

A. $a>b>c$　　B. $a=b=c$

C. $a<b<c$　　D. 不能比较大小

解析　B.

题中等式可以变形为

$$\sqrt{\frac{c-1}{c^2}}+\sqrt{\frac{b-1}{b^2}}+\sqrt{\frac{a-1}{a^2}}\leqslant\frac{3}{2},$$

而 $\sqrt{\frac{c-1}{c^2}}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{1}{2}$, 所以只能有

$$\sqrt{\frac{c-1}{c^2}}=\sqrt{\frac{b-1}{b^2}}=\sqrt{\frac{a-1}{a^2}}=\frac{1}{2},$$

解得 $a=b=c=2$.

也可以换元, 令

$$x=\sqrt{a-1},y=\sqrt{b-1},z=\sqrt{c-1},$$

则有 $x,y,z\geqslant 0$ 且题中条件变为

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}2z(x^2+1)(y^2+1)=&3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\\ \leqslant&\sum_{cyc}(z^2+1)(x^2+1)(y^2+1)\\ =&3(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1).\end{aligned}$$

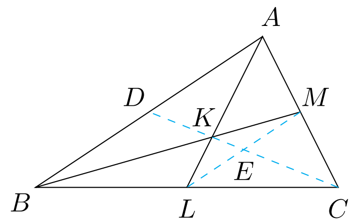
所以等号必须成立, 有 $x=y=z=1$, 从而 $a=b=c=2$.

20. 设三角形 ABC 的中线 AL 与 BM 相交于点 K , 若 K,L,C,M 四点共圆, 则 $\frac{AB}{KC}$ 的值是 (　　)

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 不能确定

解析　C.

连结 CK 并延长, 使它交 AB 边于点 D , 连结 LM , 交 CD 于点 E , 如图:



由题意知 K 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 D 为 AB 的中点，E 为 CD 的中点，也为 LM 的中点，且 K 为 CD 的靠近 D 的三等分点. 记 $KE=m$ ，则 $CD=6m, CE=3m$.

因为 K, L, C, M 四点共圆，由相交弦定理知

$$ME \cdot LE = KE \cdot CE = 3m^2,$$

解得 $ME=LE=\sqrt{3}m$. 从而有

$$\frac{AB}{KC}=\frac{2LM}{m+3m}=\frac{4\sqrt{3}m}{4m}=\sqrt{3}.$$