重庆南开中学2020级高三第四次教学质量检测考试

微信扫码查分

数　　学(文科)

注意事项： 2019.12

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z=1+m+(2m-1)\mathrm{i}(m\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部相同，则 $|z|$ 为 C

A. 3　　B. $\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知向量 $\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(x,2)$，$\vec{c}=(1,x)$，若 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$，则 $x=$ A

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 已知 $\sin 13°=a$，则 $\sin 64°=$ C

A. $(1-2a)^2$　　B. $1-2a$　　C. $1-2a^2$　　D. $2a^2-1$

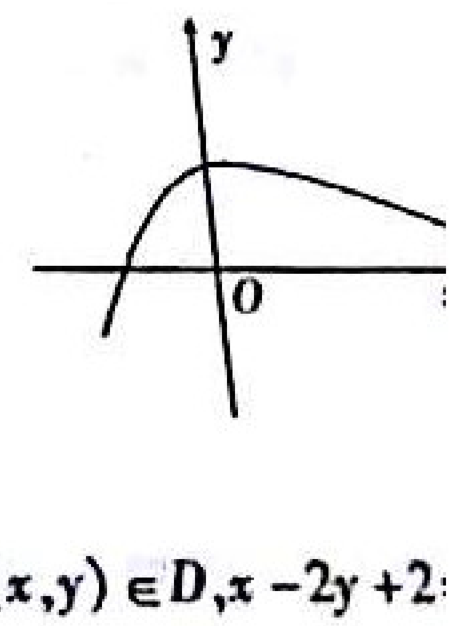
4. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{4x-x^2}\}$，$B=\{x|\log_2 x>2\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，则以下正确的是 B

A. $A\cup B=\mathbf{R}$　　B. $B\subseteq \complement_U A$　　C. $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$　　D. $A\subseteq B$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_9=\frac{1}{2}a_{11}+3$，则 $S_{13}=$ D

A. 6　　B. 26　　C. 39　　D. 78

6. 右图可能是以下哪个函数的图象 A



A. $y=\frac{x+1}{e^x}$　　B. $y=x^2e^x$

C. $y=e^x\ln|x|$　　D. $y=(e^x-e^{-x})\cos x$

7. 记不等式组 $\begin{cases}x-y\leqslant 2\\ x+y\geqslant 0\\ x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D，命题 $p:\forall(x,y)\in D, x^2+y^2\leqslant 4$，命题 $q:\exists(x,y)\in D, x-2y+2$

则以下四个命题为真命题的是 C

A. $p\wedge q$　　B. $\neg p\wedge q$　　C. $p\vee\neg q$　　D. $\neg p\wedge\neg q$

8. 已知直线 $l: x+y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=$

A. 2　　　B. -2　　　C. 4　　　D. -4

9. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别为棱 A_1B_1、BB_1、CC_1、C_1D_1 的中点，则下列结论正确的是

D A. $AB\perp$ 平面 $EFGH$ ×

B. AD_1 // 平面 $EFGH$ √

C. 三棱柱 B_1EF-C_1HG 体积是长方体体积的 $\frac{1}{6}$

D. 平面 $EFGH$ // 平面 A_1BCD_1

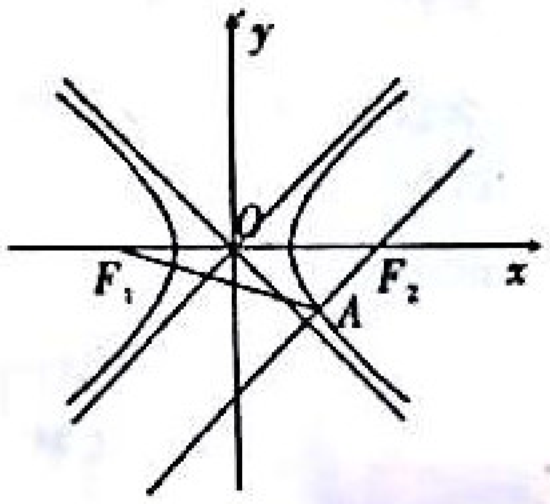
C 10. 已知 P、Q 为椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上的动点，直线 PQ 与圆 $M:(x-1)^2+y^2=1$ 相切，切点 A 恰为线段 PQ 的中点，当直线 PQ 斜率存在时点 A 的横坐标为

A. $\frac{4}{3}$　　　B. $-\frac{4}{3}$　　　C. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足：$f(x)+f'(x)<1$，且 $f(0)=2$，则不等式 $e^xf(x)>e^x+1$ 的解集是

A. $\{x|x>1\}$　　　B. $\{x|x<0\}$　　　C. $\{x|x>0\}$　　　D. $\{x|x<1\}$

12. 如图，已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过右焦点作平行于一条渐近线的直线交双曲线于点 A，若 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径为 $\frac{b}{4}$，则双曲线的离心率为



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{5}{3}$　　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。16 题第一空 2 分，第 2 空 3 分。

13. 曲线 $y=2\ln x+1$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $\underline{y=2x-1}$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$BC=4$，点 D 在线段 BC 上，若 $BD=AB=3$，则 $\sin\angle CAD=$ $\underline{\frac{\sqrt{2}}{10}}$.

15. 已知 A、B 分别是双曲线 $E: x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右顶点，点 M 在双曲线 E 上且满足 $|AB|:|BM|:|AM|=1:1:\sqrt{3}$，则双曲线方程为 $\underline{x^2-y^2=1}$

16. 有 $m(m\in\mathbf{N}^*)$ 颗糖，按以下方式分给 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个小朋友：第一个小朋友分得全部糖的一半还要多一颗，第二个小朋友分得剩下糖的一半还要多一颗，以此类推，后一个人分得前一个人余下糖的一半还要多一颗，且每个小朋友都分到了糖，糖恰好全部分完. 若 $n=4$ 时，则 $m=$ $\underline{30.}$ 颗；请写出 m、n 满足的关系式________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）

2021 年，某省将全面推行新高考制度，新高考“3 + 1 + 2”中的“2”，要求考生从政治、化学、生物、地理四门中选两科，按照等级赋分计入高考成绩，等级赋分规则如下：从 2021 年夏季高考开始，高考政治、化学、生物、地理四门等级考试科目的考生原始成绩从高到低划分为 A,B,C,D,E 五个等级，确定各等级人数所占比例分别为 15%，35%，35%，13%，2%，等级考试科目成绩计入考生总成绩时，将 A 至 E 等级内的考生原始成绩，依照等比例转换法则分别转换到[86,100]、[71,85]、[56,70]、[41,55]、[30,40]五个分数区间，得到考生的等级分，等级转换分满分为 100 分.

具体转换分数区间如下表：

等级	A	B	C	D	E
比例	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	[86,100]	[71,85]	[56,70]	[41,55]	[30,40]

而等比例转换法是通过公式计算：$\frac{Y_2-Y}{Y-Y_1}=\frac{T_2-T}{T-T_1}$

其中 Y_1、Y_2 分别表示原始分区间的最小值和最大值，T_1、T_2 分别表示等级分区间的最小值和最大值，Y 表示原始分，T 表示转换分，当原始分为 Y_1,Y_2 时，等级分分别为 T_1,T_2.

已知小明的地理考试成绩信息如下表：

考生科目	考试成绩	成绩等级	原始分区间	等级分区间
地理	75 分	B 等级	[69,84]	[71,85]

设转换后的等级分为 T，根据公式得：$\frac{84-75}{75-69}=\frac{85-T}{T-71}$

所以 $T=76.6\approx77$（四舍五入取整），小明最终的地理等级分为 77 分.

已知某年级学生一共有 100 人选了地理，以半期考试成绩为原始分转换了本年级的地理等级分，其中地理成绩获得 A 等级的所有学生原始分统计如下表：

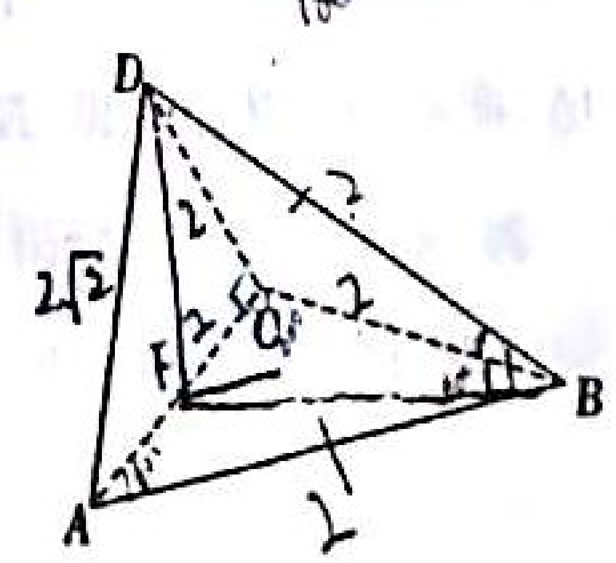
原始分	95	93	91	90	88	87	85
人数	1	2	3	2	3	2	2

（1）请将地理获得 A 等级学生的等级分填入下表：

原始分	95	93	91	90	88	87	85
等级分	91						
人数	1	2	3	2	3	2	2

（2）若将等级分不低于 94 分的学生称为“地理特优生”，现从地理获得 A 等级的学生中抽取 5 名参加座谈会，为保证信息全面性，需要对“地理特优生”及其他学生进行分层抽取. 在座谈会上，从 5 名参会的学生中随机邀请 2 位发言，求发言学生中至少有一名“地理特优生”的概率.

18.（12 分）



如图，四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形，$\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=BD$.

（1）证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC；

（2）求四面体 $ABCD$ 的表面积.

19. (12 分)

已知函数$f(x)=a\sin x\cos x-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$在区间$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为$\frac{1}{2}$.

(1)将函数$y=f(x)$图象向右平行移动$\frac{\pi}{6}$个单位得到函数$y=g(x)$的图象，求$y=g(x)$的单调增区间；

(2)在锐角$\triangle ABC$中，若$f(\frac{A}{2})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，$a=2$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

20. (12 分)

已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x-m}$，$x\in(m,+\infty)$.

(1)判断函数$f(x)$的单调性；

(2)若$m\in(0,\frac{1}{2}]$，求证：$f(x)>m^2+3m+2$在$x\in(m,m+1]$上恒成立.

21. (12 分)

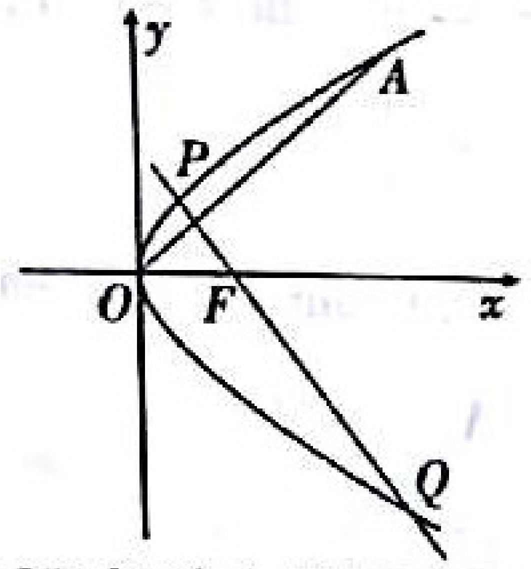
已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，A为抛物线上异于原点的动点，抛物线C内点$B(1,1)$，且$|AB|+|AF|$的最小值为2.

(1)求抛物线C的标准方程；

(2) 如图过F作OA的垂线l，直线l与抛物线交于P、Q两点.

(ⅰ)当$|PQ|=6|OA|$时，求直线OA的方程；

(ⅱ)求四边形$OPAQ$面积最小值.



请考生在第22、23两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分。作答时用2B铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑。

22. (10 分) 选修4－4：坐标系与参数方程

在直角坐标系中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数)，以原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}a$($a$为实数).

(1)求曲线C_1的普通方程与曲线C_2的直角坐标方程；

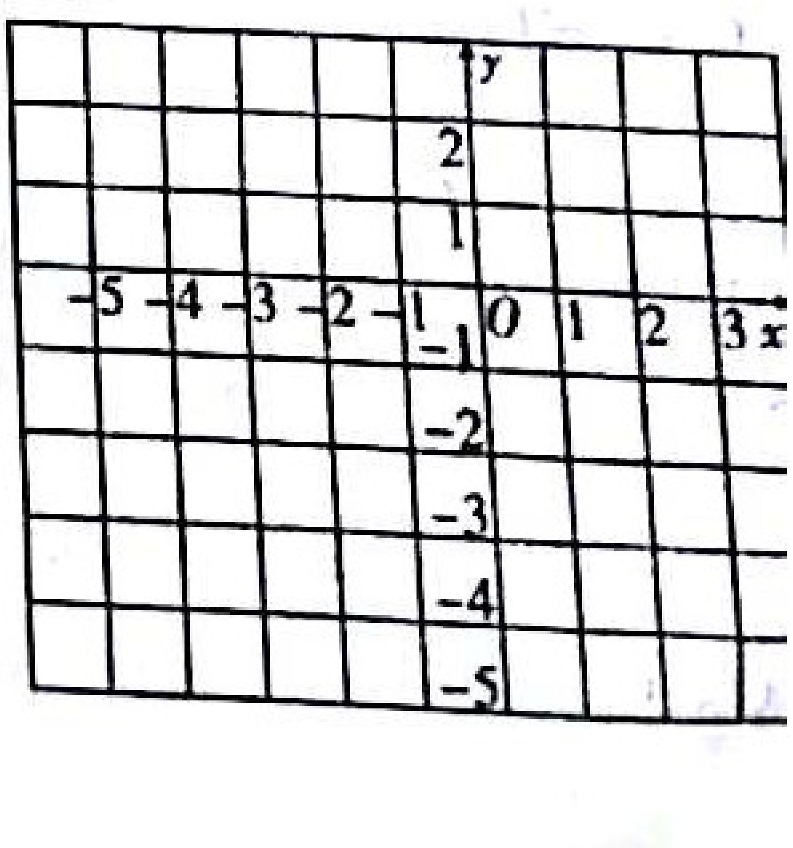
(2)当$a=3\sqrt{5}$时，设P、Q分别为曲线C_1和曲线C_2上的动点，求$|PQ|$的最小值.

23. (10 分) 选修4－5：不等式选讲

已知函数$f(x)=|1-x|-|2x+1|$的最大值为t.

(1)作出函数$f(x)$的图象并求t的值；

(2)若实数a,b,c满足$2a^2+3b^2+c^2=t$，求$2ab+bc$的最大值.



重庆南开中学2020级高三第四次教学质量检测考试·文数
参考答案、提示及评分细则

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	C	B	D	A	B	D	D	A	B	C

11. 答案：B

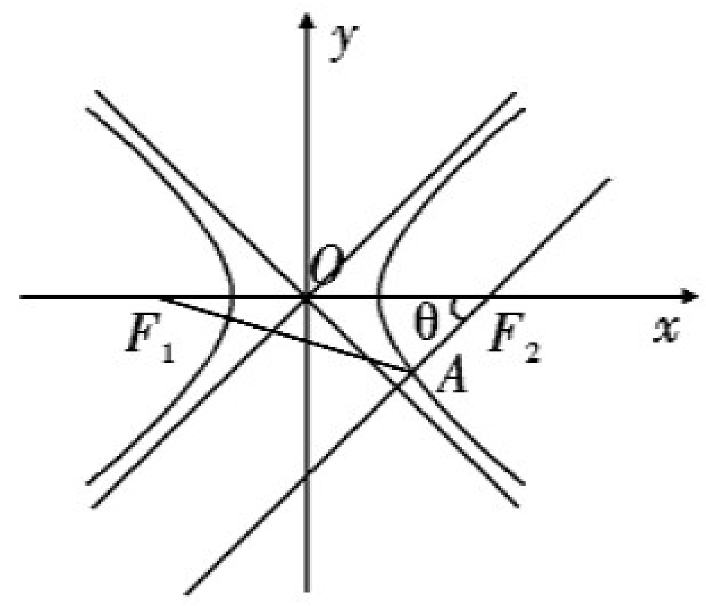
解析：令 $g(x)=e^{x}f(x)-e^{x}$，则 $g'(x)=e^{x}(f'(x)+f(x)-1)$

则 $g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $g(0)=1$

故原不等式等价于 $g(x)>g(0)\Rightarrow x<0$.

12. 答案：C

解析：设 $AF_2=m$，则 $AF_1=m+2a$，且 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$



$\therefore\ \triangle AF_1F_2$ 中，$(m+2a)^2=m^2+(2c)^2-4cm\cos\theta$

$\Rightarrow m=\dfrac{b^2}{2a}$，从而 $y_A=\dfrac{b^3}{2ac}$

由 $S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_A|=\dfrac{1}{2}\cdot(2c+m+m+2a)\cdot\dfrac{b}{4}$

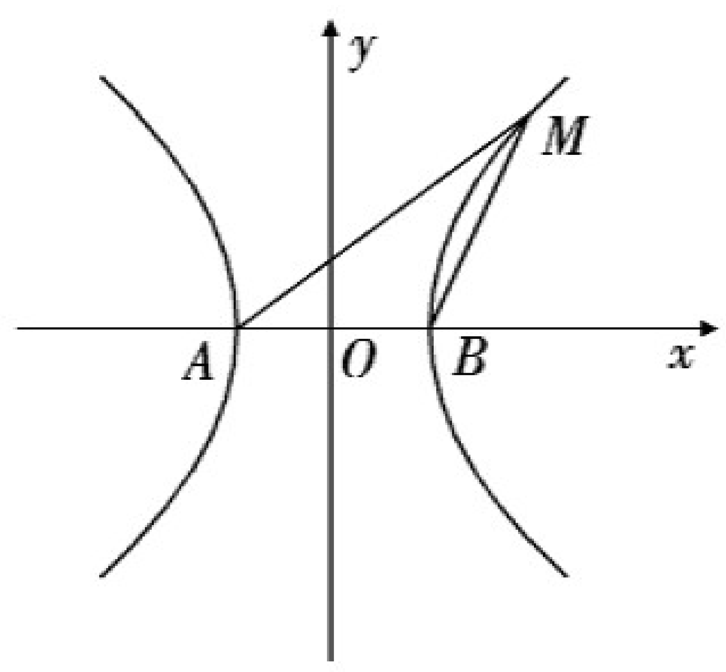
$\Rightarrow 3e^2-2e-5=0$，$\therefore e=\dfrac{5}{3}$.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 答案：$y=2x-1$

14. 答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

15. 答案：$x^2-y^2=1$



解析：如图：$AB=BM=2$，$AM=2\sqrt{3}$

故 $\angle MBx=60°$，$\therefore M(2,\sqrt{3})$ 代入 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\therefore b^2=1$.

16. 答案:30(2 分), $m=2^{n+1}-2$(3 分)

解析:设第 n 个小朋友分得 a_n 颗糖,S_n 为 a_n 的前 n 项和.

则由题意可得:$a_1=S_1=\frac{1}{2}m+1, a_n=\frac{1}{2}(m-S_{n-1})+1(n\geqslant 2)$

又 $S_n-S_{n-1}=a_n$,故 $S_n-S_{n-1}=-\frac{1}{2}S_{n-1}+\frac{1}{2}m+1$,即 $S_n=\frac{1}{2}S_{n-1}+\frac{m}{2}+1$

$\therefore S_n-m-2=\frac{1}{2}(S_{n-1}-m-2)$

$\therefore \{S_n-m-2\}$是以 $-\frac{m+2}{2}$为首项,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列

$\therefore S_n-m-2=-\frac{m+2}{2}\times(\frac{1}{2})^{n-1}$,又知 $S_n=m$

$\therefore 2^{n+1}=m+2$,$\therefore n=4$ 时,$m=30$;$m=2^{n+1}-2$

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解析:(1)由$\frac{Y_2-Y}{Y-Y_1}=\frac{T_2-T}{T-T_1}$得:$\frac{95-Y}{Y-85}=\frac{100-T}{T-86}$,$\therefore T=86+1.4(Y-85)$故可得下表:

原始分	95	93	91	90	88	87	85
等级分	100	97	94	93	90	89	86
人数	1	2	3	2	3	2	2

…………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)中表格可知,地理获得 A 等级的 15 名学生中有 6 人是"地理特优生", …………… 6 分

故按比例分层抽样需抽取"地理特优生"2 人,记作 A、B,非"地理特优生"3 人,记作 C、D、E, ……

…………………………………………………………………………………… 7 分

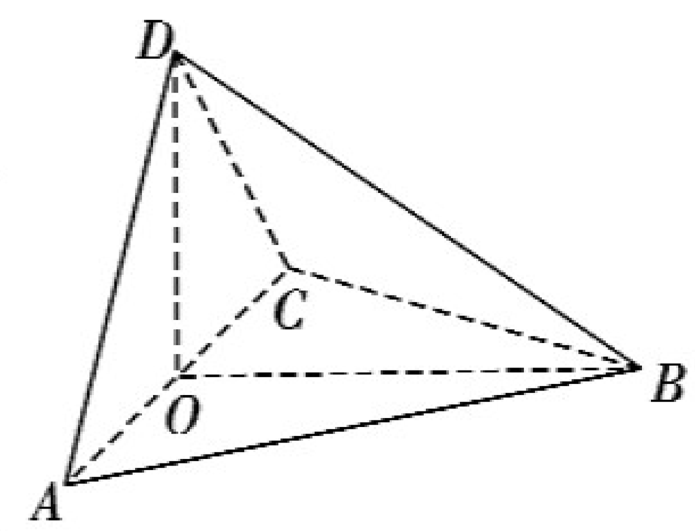
从 5 名学生中随机抽取 2 名的方法有:(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)共 10 种, …………………………………………………… 9 分

其中至少有一名"地理特优生"的方法有(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E)共 7 种,……………………………………………………………………………… 11 分

所以至少有一名"地理特优生"的概率为$\frac{7}{10}$. ……………………………………………… 12 分

18. 解析:(1)证明:如图由 $\angle ABD=\angle CBD$,$AB=BC$ 得 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$,故 $AD=CD$,

…………………………………………………………………………… 2 分



取 AC 中点 O,连接 DO,BO,由正$\triangle ABC$ 边长为 2 得 $BO=\sqrt{3}$,

在等腰直角三角形 ACD 中,$DO=1$,$DO\perp AC$,又 $BD=AB=2$,

$\therefore BD^2=BO^2+DO^2$,$\therefore DO\perp BO$, ………………………………………… 5 分

故 $DO\perp$平面 ABC,$\therefore$ 平面 $ACD\perp$平面 ABC. ………………………………………… 6 分

(2) $S_{\triangle ACD}=1, S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$ ························ 8 分

又 $BD=AB=2, AD=\sqrt{2}$, $\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BCD}=\frac{\sqrt{7}}{2}$ ························ 10 分

$\therefore$ 四面体 $ABCD$ 的表面积为 $1+\sqrt{3}+\sqrt{7}$. ························ 12 分

19. 解析:(1) $f(x)=a\sin x\cos x-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}a\sin 2x-\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{2})}{2}$

$=\frac{1}{2}(a+1)\sin 2x-\frac{1}{2}$ ························ 2 分

$\because x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $\therefore \sin 2x\in[0,1]$

若 $a>-1$, 则 $f(x)_{\max}=\frac{1}{2}(a+1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\therefore a=1$;

若 $a<-1$, 则 $f(x)_{\max}=-\frac{1}{2}$不成立.

$\therefore f(x)=\sin 2x-\frac{1}{2}$, ························ 4 分

从而 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}$ ························ 5 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\therefore -\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$

故 $y=g(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$; ························ 7 分

(2) 由 $f(x)=\sin 2x-\frac{1}{2}$ 得 $f(\frac{A}{2})=\sin A-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故由锐角 $\triangle ABC$ 得 $A=\frac{\pi}{3}$, ························ 9 分

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 即 $4=b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc$, $\therefore bc\leqslant 4$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号. ························ 12 分

20. 解析:(1) 由题得 $f'(x)=\frac{e^x(x-m-1)}{(x-m)^2}$, $x\in(m,+\infty)$, ························ 2 分

当 $x\in(m,m+1)$ 时 $f'(x)<0$, $\therefore f(x)$ 在 $x\in(m,m+1)$ 单调递减;

当 $x\in(m+1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$, $\therefore f(x)$ 在 $x\in(m+1,+\infty)$ 单调递增. ························ 4 分

(2)由(1)知函数$f(x)$在$x\in(m,m+1]$单调递减,$\therefore f(x)_{\min}=f(m+1)=e^{m+1}$

故要证$f(x)>m^2+3m+2$在$x\in(m,m+1]$上恒成立, ························ 5分

即证$e^{m+1}>m^2+3m+2$对$m\in(0,\frac{1}{2}]$恒成立.令$t=m+1,t\in(1,\frac{3}{2}]$,

构造函数$\varphi(t)=e^t-t(t+1)$即证$\varphi(t)=e^t-t(t+1)>0$成立, ························ 7分

$\varphi'(t)=e^t-2t-1$,令$h(t)=e^t-2t-1,h'(t)=e^t-2>0,t\in(1,\frac{3}{2}]$

$\therefore h(t)$在$t\in(1,\frac{3}{2}]$上单调递增,又$h(1)=e-3<0,h(\frac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}-4>0$,

所以存在$t_0\in(1,\frac{3}{2}]$使得$h(t_0)=0$,即$\varphi'(t_0)=0$,······························ 9分

当$t\in(1,t_0)$时$\varphi'(t)<0,t\in(t_0,\frac{3}{2})$时$\varphi'(t)>0$

$\therefore \varphi(t)\geqslant\varphi(t_0)=e^{t_0}-t_0^2-t_0=2t_0+1-t_0^2-t_0=-t_0^2+t_0+1$,······················ 11分

当$t_0\in(1,\frac{3}{2}]$时$p(t_0)=-t_0^2+t_0+1>0,t_0\in(1,\frac{3}{2}]$,

即证得$\varphi(t)=e^t-t(t+1)>0$成立. ·· 12分

21.解析:(1)由抛物线定义知$|AF|=d$,$\therefore |AB|+|AF|=|AB|+d\geqslant1+\frac{p}{2}=2$,$\therefore p=2$,

故抛物线C的标准方程为$y^2=4x$. ·· 4分

(2)已知直线OA斜率存在且不为0,故设直线OA方程为$y=-mx$与抛物线$y^2=4x$联立得

$m^2x^2=4x$,$\therefore A(\frac{4}{m^2},-\frac{4}{m})$,$\therefore |OA|=\frac{4\sqrt{1+m^2}}{m^2}$ ························ 5分

设过F作OA的垂线l为$x=my+1$代入抛物线方程得:

$y^2-4my-4=0$,$\therefore y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$

$\therefore |OP|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=\sqrt{(1+m^2)(16m^2+16)}=4(m^2+1)$ ························ 7分

(ⅰ)若$|PQ|=6|OA|$则$4(m^2+1)=6\cdot\frac{4\sqrt{1+m^2}}{m^2}$,$\therefore m^2=3$,

故直线OA的方程为$y=\pm\sqrt{3}x$ ·· 8分

(ⅱ)因为$OA\perp PQ$,$\therefore$四边形$OPAQ$面积为$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot|PQ|=\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^2}\cdot4(1+m^2)$ ······ 9分

令$t=\sqrt{1+m^2},t>1$,$\therefore S=\frac{8t^3}{t^2-1}$,设$f(t)=\frac{t^3}{t^2-1}$,则$f'(t)=\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}(t>1)$, ················ 11分

当$t\in(1,\sqrt{3})$时$f'(t)<0$,$\therefore f(t)$单调递减,当$t\in(\sqrt{3},+\infty)$时$f'(t)>0$,$\therefore f(t)$单调递增,

故$S_{\min}=8f(t)=8f(\sqrt{3})=12\sqrt{3}$,此时直线$l:x=\pm\sqrt{2}y+1$. ························ 12分

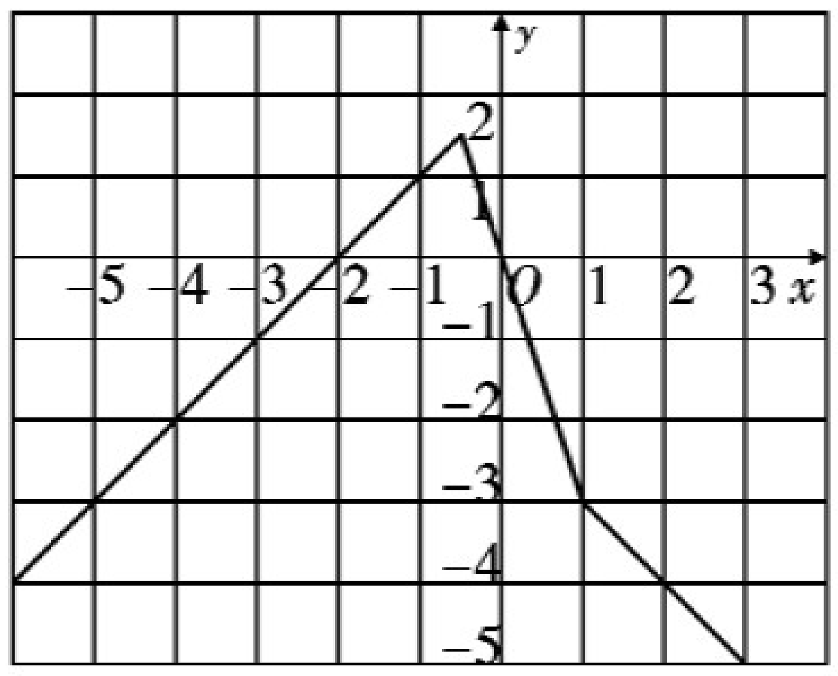
22. 解析：(1) 由 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 得：曲线 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$， ………………………… 2 分

由 $\rho\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (a 为实数) 得曲线 C_2 的直角坐标方程为：$x + y = a$. …………………… 5 分

(2) 设 $P(2\cos\theta, \sin\theta)$ ($\theta \in \mathbf{R}$)，当 $a = 3\sqrt{5}$ 时，则 P 到直线 $x + y = 3\sqrt{5}$ 的距离的最小值即为 $|PQ|$ 的最小值，因为 $d = \frac{|2\cos\theta + \sin\theta - 3\sqrt{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi) - 3\sqrt{5}|}{\sqrt{2}}$ ………………………… 8 分

当 $\sin(\theta + \varphi) = 1$ 时，$|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{10}$. ………………………………………… 10 分

23. 解析：(1) $f(x) = |1 - x| - |2x + 1| = \begin{cases} -x - 2 (x \geqslant 1) \\ -3x (-\frac{1}{2} < x < 1) \\ x + 2 (x \leqslant -\frac{1}{2}) \end{cases}$， ………… 3 分



如图当 $x = -\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 的最大值 $t = \frac{3}{2}$. ……………………… 5 分

(2) $\because 2a^2 + 3b^2 + c^2 = \frac{3}{2}$，$\therefore 2(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) = \frac{3}{2} \geqslant 4ab + 2bc$ ………………………… 8 分

$\therefore 2ab + bc \leqslant \frac{3}{4}$ 当且仅当 $a = b = c$ 时取等号. ………………………………………… 10 分