北京师范大学附属实验中学

2018—2019 学年度第二学期高一年级期中考试 数学试卷

试卷说明：

1. 本试卷考试时间为 120 分钟；总分为 150 分.
2. 一卷共 3 个大题，共 17 小题，满分 100 分.
3. 二卷共 2 个大题，共 8 小题，满分 50 分.
4. 所有试题的答案都要写在答题纸上.

命题人：资坤，王宁

第一卷

一、选择题：每小题 5 分，共 40 分.

1．设 $a,b\in\mathbf{R}$，$a>b$，则下列各式中一定成立的是

A．$-a<-b$　　B．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C．$a^2>b^2$　　D．$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

2．下列命题中正确的是

A．不相交的两条直线平行

B．垂直于同一直线的两直线平行

C．过平面外一点有且只有一条直线与平面平行

D．垂直于同一直线的两平面平行

3．在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=2$，$b=3$，$C=60°$，则$\triangle ABC$ 的面积是

A．3　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$3\sqrt{3}$　　D．$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

4．若直线经过两点 $A(1,2)$，$B(3,m)$，且倾斜角为 45°，则 m 的值是

A．2　　B．4　　C．6　　D．不存在这样的 m

5．在$\triangle ABC$ 中，角 A，B 的对边分别为 a，b，若 $a\sin A=b\sin B$，则$\triangle ABC$ 的形状是

A．等腰三角形　　B．直角三角形

C．等腰三角形或直角三角形　　D．任意三角形

6．已知正实数 x，y 满足 $xy=1$，则 $2x+3y$ 的最小值是

A．5　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\sqrt{6}$　　D．$2\sqrt{6}$

7．圆锥的底面半径为 1，母线长为 2，则此圆锥的表面积为

A．2π　　B．3π　　C．4π　　D．5π

8．长方体有三个面的面积分别是 $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$，则它的外接球的直径是

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．3　　D．$\sqrt{14}$

二、填空题：每小题 5 分，共 30 分.

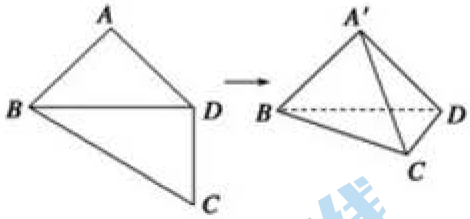
9．平面直角坐标系内，点(1,2)关于点(3,1)的对称点的坐标为____.

10．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=2,b=3,c=4$，则 $\cos C$ 的值为____.

11．各棱长都为 1 的正三棱柱的体积是____.

12．平面直角坐标系内，经过点(2,3)且与直线 $2x+3y-6=0$ 平行的直线的方程为____.

13．如图四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=CD=1$，$BD=\sqrt{2}$，$BD\perp CD$，将四边形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折成四面体 $A'-BCD$，使得平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，则下列结论：①$BA'\perp CD$；②$A'C\perp BD$；③$\angle BA'C=90°$；④$A'D\perp BC$，其中正确的是____.（填序号）



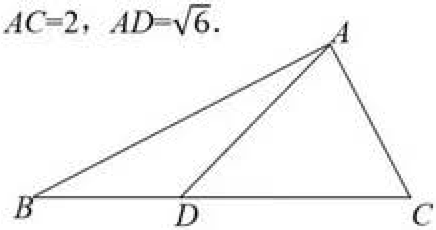
14．已知对于直线 l：$y=kx+b$ 上的任意点 (x_0,y_0)，点 $(2y_0,2x_0)$ 仍在直线 l 上，则有序数对 (x_0,y_0) 除满足方程 $y_0=kx_0+b$ 外，还应满足方程____；直线 l 的方程为____.

三、解答题：每小题 10 分，共 30 分.

15．如图，在△ABC 中，点 D 在 BC 边上，$\angle ACD=60°$，$AC=2$，$AD=\sqrt{6}$.

（Ⅰ）求 $\angle ADC$ 的值；

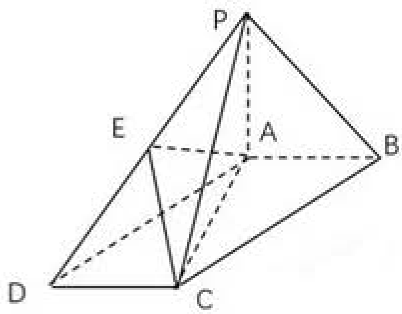
（Ⅱ）若 $BD=\sqrt{3}$，求 AB 的长.



16．如图，在底面为平行四边形的四棱锥 P-$ABCD$ 中，$AB\perp AC$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 是 PD 的中点.

（Ⅰ）求证：$AC\perp PB$；

（Ⅱ）求证：PB∥平面 AEC.



17．已知直线 l_1：$ax+2y+6=0$ 和直线 l_2：$x+(a-1)y-1=0$ 互相垂直．

（Ⅰ）求 a 的值；

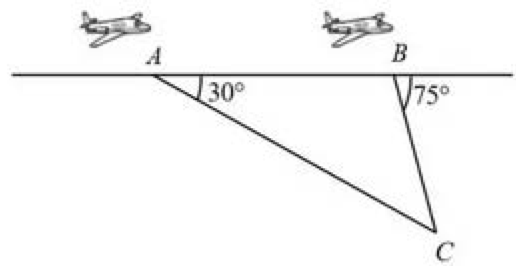
（Ⅱ）求 l_1，l_2 与 x 轴围成的三角形的面积；

（Ⅲ）若直线 l_3: $y=x+t$ 将（Ⅱ）中的三角形分成面积相等的两部分，求 t 的值．

第二卷

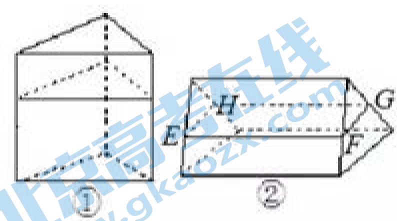
四、填空题：每小题 5 分，共 25 分．

18．如图，飞机飞行的航线 AB 和地面目标 C 在同一铅直平面内，在 A 处测得目标 C 的俯角为 30°，飞行到达 B 处，测得目标 C 的俯角为 75°，这时测得 BC 的距离为 $4\sqrt{2}$ 千米，那么飞机飞行的距离 AB 的值为___千米．



19．已知正四棱台的高为 1，侧棱长为 $\sqrt{2}$，则其斜高的长为___．

20．如图①所示一个正三棱柱形容器，高为 2，内装水若干，如图②将容器放倒使一个侧面成为底面，若这时水面恰为中截面（即点 E，F，G，H 分别为各自所在棱的中点），则未放倒前的水面高度为___．



21．经过点 $P(1,2)$ 的一条直线分别与 x 轴，y 轴的正半轴交于点 A，B，则 $|OA|+|OB|$ 的最小值是___．

22．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+|x-3|$ 的最小值为___．

五、解答题：共 25 分．

23．（6 分）已知三个数 $A=x^2+2x$，$B=4x-1$，$C=x^2+4$，试比较 A,B,C 的大小关系．

24．（9 分）已知△ABC 的周长为 $4(\sqrt{2}+1)$，且 $\sin B+\sin C=\sqrt{2}\sin A$．

（Ⅰ）求 a 的值；

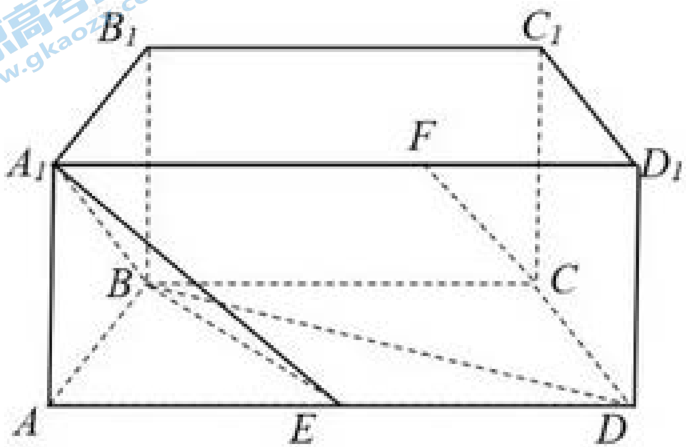
（Ⅱ）若 $bc=6$，求 $\cos A$ 的值和△ABC 的面积．

25.（10 分）如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC // AD$，$\triangle ABD$ 是边长为 2 的等边三角形，E 是 AD 的中点，F 是 A_1D_1 上靠近 D_1 的三等分点.

（Ⅰ）求证：平面 $A_1BE \perp$ 平面 ADD_1A_1；

（Ⅱ）若 $CF //$ 平面 A_1BE，求 BC 的长；

（Ⅲ）在线段 A_1E 上是否存在点 G，使得平面 $CFG \perp$ 平面 A_1BE？若存在，说明点 G 所在的位置；若不存在，说明理由.



参考答案和评标

第一卷

一．选择题（每小题 5 分，共 40 分）　**ADDB ADBB**

二．填空题（每小题 5 分，共 30 分）

9．(5，0)　10．$-\frac{1}{4}$　11．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　12．$2x+3y-13=0$　13．①③

14．$2x_0=2y_0k+b$，　$x\pm y=0$

（注：14 题第一空 3 分，若将两式联立，写出其它正确结果也给分；第二空若只写出一个正确答案，得 1 分）

三．解答题

15．（Ⅰ）解：在△ACD 中，由正弦定理得：

$$\sin\angle ADC=\frac{AC\sin\angle ACD}{AD}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\cdots\cdots\ 3\text{ 分}$$

又 AD>AC，知∠ACD>∠ADC，所以∠ADC=45°　…… 6 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）知∠ADB=135°，在△ABD 中，由余弦定理，得

$$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\bullet BD\cos\angle ADB$$

$$=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=15$$

所以 $AB=\sqrt{15}$　…… 10

16．（Ⅰ）证明：∵ PA⊥平面 ABCD，AC⊂平面 ABCD

∴ PA⊥AC　…… 1 分

又 AC⊥AB，且 PA、AB 为平面 PAB 内的相交直线

∴ AC⊥平面 PAB　…… 4 分

又 PB⊂平面 PAB，　∴ AC⊥PB　…… 5 分

（Ⅱ）证明：连接 BD 交 AC 于 O，连接 EO。

∵平行四边形 ABCD

∴AC 与 BD 相互平分，即 O 为 BD 中点

又 E 为 PD 中点　∴OE∥PB　…… 7 分

∵EO 为平面 AEC 内直线，PB 不为平面 AEC 内直线

∴PB∥平面 AEC　…… 10

17.（Ⅰ）解：由 $l_1 \perp l_2$ 得

$a+2(a-1)=0$，解得 $a=\frac{2}{3}$ ……3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 l_1: $x+3y+9=0$，l_2: $3x-y-3=0$

l_1 与 x 轴交于 A（-9，0），l_2 与 x 轴交于 B（1，0），l_1 与 l_2 交于 C（0，-3）

l_1, l_2, x 轴围成的三角形为△ABC，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot|-3|=15$. ……7 分

（Ⅲ）设 l 交 x 轴于 D（-t, 0），

联立 $\begin{cases} x+3y+9=0 \\ y=x+t \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-\frac{3t+9}{4} \\ y=\frac{t-9}{4} \end{cases}$ 即 l_1 与 l 的交点为 $E(-\frac{3t+9}{4},\ \frac{t-9}{4})$. ……8 分

当 D 与 B（1，0）重合时，t=-1，$E(-\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2})$.

$$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\times 10\times\left|-\frac{5}{2}\right|=\frac{25}{2}>\frac{15}{2}=S_{\Delta ABE}$$

可知点 D 在线段 AB 上，即 $-1<t<9$，

所以 $S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\cdot|(-t)-(-9)|\cdot\left|\frac{t-9}{4}\right|=\frac{15}{2}$ ……9 分

解得：$t_1=9+2\sqrt{15}$（舍去），$t_2=9-2\sqrt{15}$.

第二卷

四．填空题（每小题 5 分）

18．8　　19．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　20．$\frac{3}{2}$　　21．$3+2\sqrt{2}$　　22．$\sqrt{5}$

五．解答题

23．解：$A-B=(x-1)^2\geq 0$，$C-B=(x-2)^2+1>0$，……3 分

$A-C=2(x-2)$

当 $x>2$ 时，$A>C>B$.

当 $x=2$ 时，$A=C>B$.

当 $1<x<2$ 时，$C>A>B$.

当 $x=1$ 时，$C>A=B$.

当 $x<1$ 时，$C>A>B$. ……6 分

（注：证明 $A\geq B, C>b$ 可得 3 分，能分 3 种情况比较 A, C 大小..

24. 解：（I）因$\sin B+\sin C=\sqrt{2}\sin A$，由正弦定理，得$b+c=\sqrt{2}a$

因$a+b+c=4(\sqrt{2}+1)$，

所以$a+\sqrt{2}a=4(\sqrt{2}+1)$，得 $a=4$. …… 4 分

（II）由（I）知：$b+c=4\sqrt{2}$

因 $bc=6$，由余弦定理，

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{12}=\frac{32-12-16}{12}=\frac{1}{3}$. …… 6 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$. …… 9 分

25.（I）因$\triangle ABD$是等边三角形，E是AD的中点

所以 $BE\perp AD$

因直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，所以 $A_1A\perp$平面 ABCD.

又 $BE\subset$平面 ABCD，所以 $A_1A\perp BE$

因 A_1A、AD 是平面 ADD_1A_1 内的相交直线

所以 $BE\perp$平面 ADD_1A_1， …… 3 分

又 $BE\subset$平面 A_1BE

所以 平面 $A_1BE\perp$平面 ADD_1A_1 …… 4 分

（II）因直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

所以 $D_1A_1/\!/AD$， 又 $BC/\!/AD$

所以 $D_1A_1/\!/BC$，所以 D_1、A_1、B、C 共面 …… 5 分

因 $CF/\!/$平面 A_1BE，$CF\subset$平面 D_1A_1BC，平面 $D_1A_1BC\cap$平面 ABE$=A_1B$

所以 $CF/\!/A_1B$ …… 6 分

所以四边形 A_1BCF 是平行四边形

所以 $BC=A_1F=\frac{2}{3}A_1D=\frac{2}{3}AD=\frac{4}{3}$ …… 7 分

（III）过 F 作 $FG\perp A_1E$ 交 AE 于 G，若 G 在线段 A_1E 上，则 G 为所求

若 G 在线段 A_1E 的延长线上，则满足要求的点 G 不存在.

（注：答"存在，过 F 作 $FG\perp A_1E$ 交 AE 于 G，点 G 为所求"，可得第 8 分）

下证：平面 $CFG\perp$平面 A_1BE

由（I）知：$BE\perp$平面 ADD_1A_1，又 $FG\subset$平面 ADD_1A_1

所以 $BE\perp FG$.

因 $FG\perp A_1E$，且 A_1E、BE 为平面 A_1BE 内相交直线

所以 $FG\perp$ 平面 A_1BE

因 $FG\subset$ 平面 CFG

所以平面 $CFG\perp$ 平面 A_1BE …… 9 分

下面分析点 G 存在的条件：

考虑矩形 ADD_1A_1，设 $AA_1=x$，

则垂足 G 在 A_1E 上，当且仅当 $\angle FEA_1\le 90^\circ$，

当且仅当 $A_1E^2+EF^2\ge A_1F^2$，即 $(x^2+1)+(x^2+\frac{1}{9})\ge\frac{16}{9}$，即 $x\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$。

结论：若 $A_1A\ge\frac{\sqrt{3}}{3}$，则存在点 G，满足 $FG\perp A_1E$；

若 $0<A_1A<\frac{\sqrt{3}}{3}$，则不存在这样的点 G。 …… 10 分