广东实验中学　东北育才中学　石家庄二中　华中师大一附中
西南大学附中　南京师大附中　湖南师大附中　福州一中
八校

2024届高三第一次学业质量评价(T8联考)
数学试题

命题学校：华中师范大学第一附属中学

命题人：王文莹　尹友军　方牡丹　曹轩　　审题人：王文莹

考试时间：2023年12月25日下午15:00—17:00　试卷满分：150分　考试用时：120分钟

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\log_2 x<1\}$，$B=\{y|y=2^x\}$，则

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cap B=A$　　C. $A\cup B=\mathbf{R}$　　D. $A\cup B=A$

2. 已知复数 z 满足 $(z+2)\mathrm{i}=2z-1$，则复数 $\overline{z}=$

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. $\sqrt{5}\mathrm{i}$　　D. $-\sqrt{5}\mathrm{i}$

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，则"$m+n=p+q$"是"$a_m+a_n=a_p+a_q$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 直线 $x-y-1=0$ 将圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=8$ 分成两段，这两段圆弧的弧长之比为

A. $1:2$　　B. $1:3$　　C. $1:5$　　D. $3:5$

5. 设 F 为抛物线 $y^2=2x$ 的焦点，A,B,C 为抛物线上的三个点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\mathbf{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

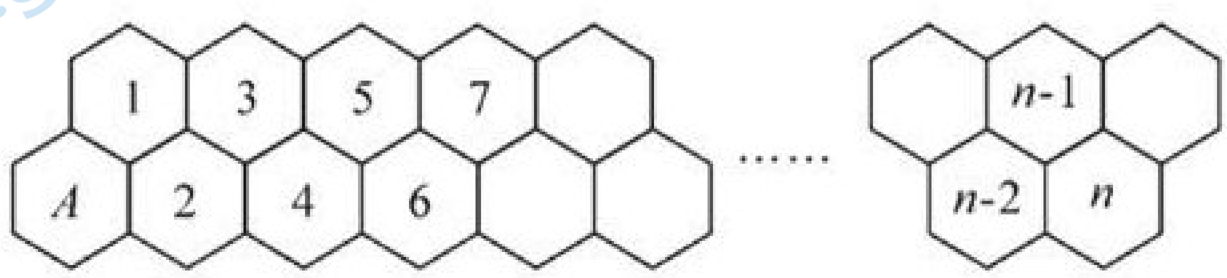
6. 秋冬季节是某呼吸道疾病的高发期，为了解该疾病的发病情况，疾控部门对该地区居民进行普查化验，化验结果阳性率为 1.97%，但统计分析结果显示患病率为 1%. 医学研究表明化验结果是有可能存在误差的，没有患该疾病的居民其化验结果呈阳性的概率为 0.01，则该地区患有该疾病的居民化验结果呈阳性的概率为

A. 0.96　　　　B. 0.97　　　　C. 0.98　　　　D. 0.99

7. 已知正数 a,b,c 满足 $ae^a=b\ln b=e^c\ln c=1$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $c<a<b$　　　　B. $c<b<a$　　　　C. $a<b<c$　　　　D. $a<c<b$

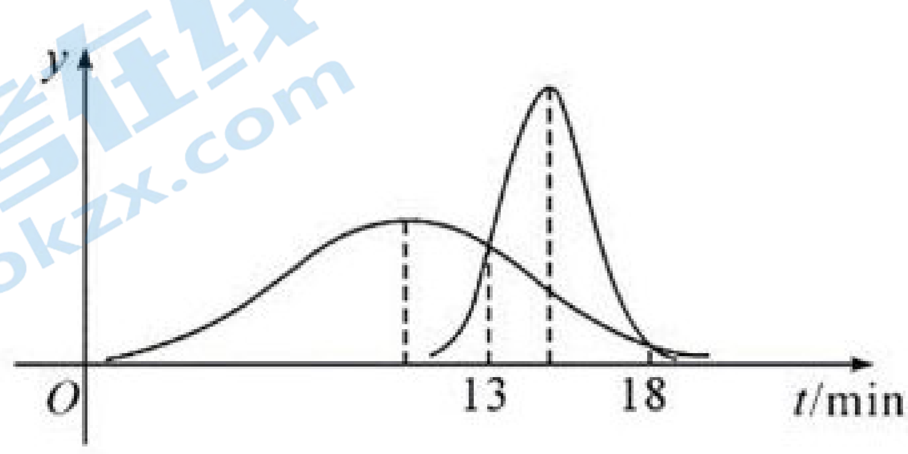
8. 一只蜜蜂从蜂房 A 出发向右爬，每次只能爬向右侧相邻的两个蜂房(如图)，例如：从蜂房 A 只能爬到 1 号或 2 号蜂房，从 1 号蜂房只能爬到 2 号或 3 号蜂房……以此类推，用 a_n 表示蜜蜂爬到 n 号蜂房的方法数，则 $a_{2\,022}a_{2\,024}-a_{2\,023}^2=$



A. 1　　　　B. -1　　　　C. 2　　　　D. -2

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 小明上学有时坐公交车，有时骑自行车，他各记录了 10 次坐公交车和骑自行车所花的时间，10 次坐公交车所花的时间分别为 7，11，8，12，8，13，6，13，7，15(单位：min)，10 次骑自行车所花时间的均值为 15 min，方差为 1. 已知坐公交车所花时间 X 与骑自行车所花时间 Y 都服从正态分布，用样本均值和样本方差估计 X,Y 分布中的参数，并利用信息技术工具画出 X 和 Y 的分布密度曲线如图所示. 若小明每天需在早上 8 点之前到校，否则就迟到，则下列判断正确的是



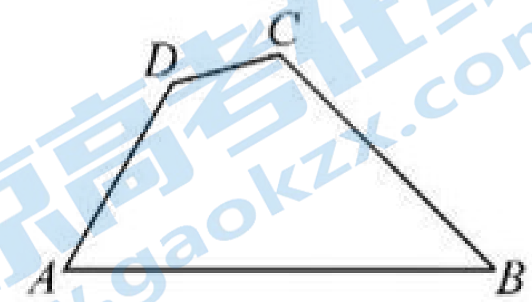
A. 坐公交车所花时间的均值为 10，方差为 3

B. 若小明早上 7:50 之后出发，并选择坐公交车，则有 50% 以上的可能性会迟到

C. 若小明早上 7:42 出发，则应选择骑自行车

D. 若小明早上 7:47 出发，则应选择坐公交车

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60°$，$\angle DCB=120°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$，则下列结果正确的是



A. $\angle ABC=45°$　　　　B. $AC=\sqrt{3}$

C. $BD=\sqrt{3}$　　　　D. $\triangle ADC$ 的面积为$\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

11. 已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，则下面判断正确的是

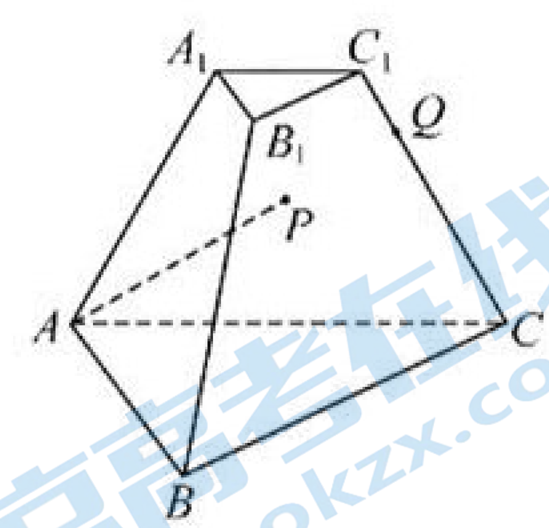
A. 若 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)>f(x)$，则函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

B. 若 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$|f(x_1)+f(x_2)|\leqslant|\sin x_1+\sin x_2|$，则函数 $f(x)$是奇函数

C. 若 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|\sin x_1-\sin x_2|$，则函数 $f(x)$是周期函数

D. 若 $\forall x_1,x_2\in(-1,1)$且 $x_1\neq x_2$，$|f(x_1)-f(x_2)|<|\sin x_1-\sin x_2|$，则函数 $f(x)+\sin x$ 在区间$(-1,1)$上单调递增，函数 $f(x)-\sin x$ 在区间$(-1,1)$上单调递减

12. 如图，已知正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的上、下底面边长分别为 2 和 6，侧棱长为 4，点 P 在侧面 BCC_1B_1 内运动(包含边界)，且 AP 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $2\sqrt{2}$，点 Q 为 CC_1 上一点，且$\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{QC_1}$，则下列结论中正确的有



A. 正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 $2\sqrt{6}$

B. 点 P 的轨迹长度为$\sqrt{3}\pi$

C. 高为$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$，底面半径为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$的圆柱可以放进棱台内

D. 过点 A,B,Q 的平面截该棱台内最大的球所得的截面面积为$\dfrac{3}{2}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{c}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，则 $t=$________.

14. 已知$(1+x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则 $a_5+2a_4+4a_3+8a_2-16a_1+32a_0=$

________.

15. 三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的每一个面都是边长为 1 的正三角形，以它的高 PH 所在直线为旋转轴，将其旋转 $60°$得到三棱锥 $P\text{-}A'B'C'$，则两个三棱锥公共区域的体积为________.

16. 已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，若过点 F_2 的直线与双曲线的左、右两支分别交于 A,B 两点，且 $AF_1=BF_1=2\sqrt{5}$. 又以双曲线的顶点为圆心，半径为 $2\sqrt{2}$的圆恰好经过双曲线虚轴的端点，则双曲线的离心率为________.

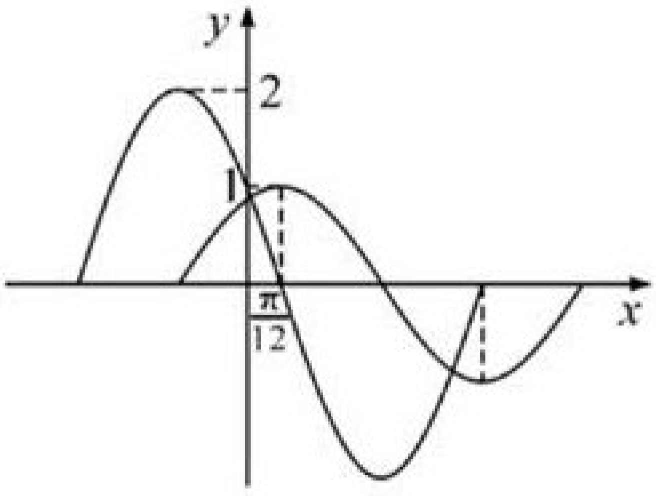
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 及其导函数的图象如图所示.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上恰有 2 个极值点和 2 个零点，求实数 m 的取值范围.

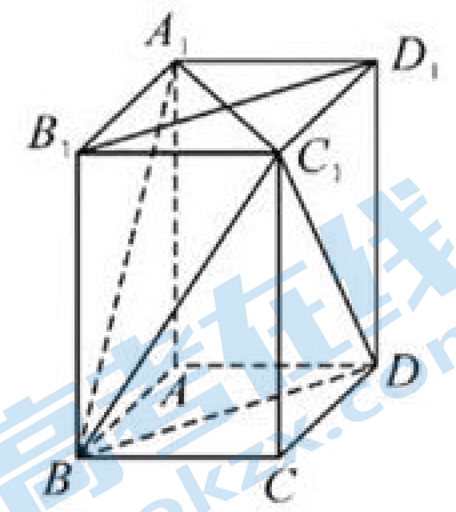


18.（本小题满分 12 分）

如图，直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面为菱形，$AB=AC=2$，$AA_1=2\sqrt{3}$.

(1)证明：平面 $A_1C_1B\perp$ 平面 BDD_1B_1；

(2)求直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值.



19.（本小题满分 12 分）

为应对全球气候变化，我国制定了碳减排的国家战略目标，采取了一系列政策措施积极推进碳减排，作为培育发展新动能、提升绿色竞争力的重要支撑，节能环保领域由此成为全国各地新一轮产业布局的热点和焦点. 某公司为了解员工对相关政策的了解程度，随机抽取了 180 名员工进行调查，得到如下表的数据：

了解程度	性别		合计
	男性	女性	
比较了解	60	60	
不太了解	20	40	
合计			

(1)补充表格,并根据小概率值 $\alpha=0.025$ 的独立性检验,分析了解程度与性别是否有关?

(2)用分层抽样的方式从不太了解的人中抽取 12 人,再从这 12 人中随机抽取 6 人,用随机变量 X 表示这 6 人中男性员工人数与女性员工人数之差的绝对值,求 X 的分布列和数学期望.

附表及公式:

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
x_α	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F,点 P 是椭圆与 x 轴正半轴的交点,点 Q 是椭圆与 y 轴正半轴的交点,且 $|FQ|=\sqrt{2}$,$|PF|=\sqrt{2}-1$. 直线 l 过圆 $O:x^2+y^2=1$ 的圆心,并与椭圆相交于 A,B 两点,过点 A 作圆 O 的一条切线,与椭圆的另一个交点为 C,且 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{4}{3}$.

(1)求椭圆的方程;

(2)求直线 AC 的斜率.

21.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$为等差数列，公差 $d>0$，等比数列$\{b_n\}$满足：$b_1=2a_1=2$，$b_2=a_1+a_3$，$b_1b_3=5a_3+1$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若将数列$\{a_n\}$中的所有项按原顺序依次插入数列$\{b_n\}$中，组成一个新数列：$b_1,a_1,b_2,a_2,a_3,b_3,a_4,a_5,a_6,a_7,b_4,\cdots$，在 b_k 与 b_{k+1}之间插入 2^{k-1}项$\{a_n\}$中的项，新数列中 b_{n+1}之前（不包括 b_{n+1}）所有项的和记为 T_n，若 $d_n=\frac{a_n^2}{a_{n+1}}\left(\frac{2^{n-1}}{T_n+2}+2\right)$，求使得$[d_1]+[d_2]+[d_3]+\cdots+[d_n]\leqslant 2\,023$ 成立的最大正整数 n 的值.（其中符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数）

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=3a-x-(x+1)\ln(x+1)$，$g(x)=a^2e^x+\frac{1}{2}(2-a)x^2-3ax\ (x>-1)$，$1\leqslant a\leqslant 6$，$g(x)$的导函数记为 $g'(x)$，e 为自然对数的底数，约为 2.718.

(1)判断函数 $f(x)$的零点个数；

(2)设 x_1 是函数 $f(x)$的一个零点，x_2 是函数 $g(x)$的一个极值点，证明：

①$-1<x_2<1<x_1$；

②$f(x_2)<g'(x_1)$.

2024届高三第一次学业质量评价(T8联考)

数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	B	A	A	C	C
题号	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	BCD	ACD	BCD	CD

1.【答案】B

【解析】$\because A=\{x|\log_2 x<1\}=\{x|0<x<2\}$，$B=\{y|y=2^x\}=\{y|y>0\}$，$\therefore A\cap B=A$，$A\cup B=B$，故正确选项为B.

2.【答案】B

【解析】由$(z+2)i=2z-1$可得$(2-i)z=1+2i$，$\therefore z=\frac{1+2i}{2-i}=\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=i$，$\therefore \bar{z}=-i$，故正确选项为B.

3.【答案】A

【解析】设$\{a_n\}$的公差为d，由$a_m+a_n=a_p+a_q$可得$2a_1+(m+n-2)d=2a_1+(p+q-2)d$，

$\therefore (m+n-2)d=(p+q-2)d$，$\therefore m+n=p+q$或$d=0$，$\therefore$“$m+n=p+q$”不是“$a_m+a_n=a_p+a_q$”的必要条件；若$m+n=p+q$，则一定有$a_m+a_n=a_p+a_q$，$\therefore$“$m+n=p+q$”是“$a_m+a_n=a_p+a_q$”的充分条件，故正确选项为A.

4.【答案】A

【解析】设直线与圆的两个交点为A、B，圆心为C，$\angle ACB=2\alpha(0<\alpha<\pi)$，$\because$圆心到直线的距离为$\frac{|2-3-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$\therefore \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，$\because 0<\alpha<\pi$，

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$，$\therefore \angle ACB=\frac{2\pi}{3}$，两段圆弧的弧长之比等于两段弧所对圆心角的弧度数之比，等于$\frac{2\pi}{3}:\left(2\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=1:2$，故正确选项为A.

5.【答案】C

【解析】设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则$\left(x_1-\frac{1}{2}\right)+\left(x_2-\frac{1}{2}\right)+\left(x_3-\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore x_1+x_2+x_3=\frac{3}{2}$，$\therefore |\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=\left(x_1+\frac{1}{2}\right)+\left(x_2+\frac{1}{2}\right)+\left(x_3+\frac{1}{2}\right)=x_1+x_2+x_3+\frac{3}{2}=3$，

故正确选项为C.

6.【答案】C

【解析】设A=“患有该疾病”，B=“化验结果呈阳性”．由题意可知$P(A)=0.01$，$P(B)=0.0197$，$P(B|\bar{A})=0.01$.

$\because P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$，

$\therefore 0.0197=0.01\times P(B|A)+0.99\times 0.01$，

解得$P(B|A)=0.98$.

$\therefore$患有该疾病的居民化验结果呈阳性的概率为0.98，故正确选项为C.

7.【答案】D

【解析】易知$b>1$，$c>1$，$0<a<1$，$\therefore$排除选项A和B．当$x>1$时，函数$y=x\ln x$和函数$y=e^x\ln x$均单调递增，且$x\ln x<e^x\ln x$．$\therefore$由$b\ln b=e^c\ln c$可得$c<b$．综上所述，$a<c<b$．故正确选项为D.

8.【答案】A

【解析】由题意可得$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=5$，$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant 2)$.

$\therefore n\geqslant 2$时，$a_na_{n+2}-a_{n+1}^2=a_n(a_{n+1}+a_n)-a_{n+1}^2=a_na_{n+1}+a_n^2-a_{n+1}^2=a_n^2+a_{n+1}(a_n-a_{n+1})=a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=-(a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2)$.

$\because a_1a_3-a_2^2=-1$，$\therefore$数列$\{a_na_{n+2}-a_{n+1}^2\}$是以-1为首项，-1为公比的等比数列.

$\therefore a_{2022}a_{2024}-a_{2023}^2=(-1)\times(-1)^{2021}=1$，

故正确选项为A.

9.【答案】BCD

【解析】坐公交车所花时间的均值为

$\frac{7+11+8+12+8+13+6+13+7+15}{10}=10$，

方差为$\frac{1}{10}(3^2+1^2+2^2+2^2+2^2+3^2+4^2+3^2+3^2+5^2)=9$，故选项A错误.

根据题意，可以得到$X\sim N(10,3^2)$，$Y\sim N(15,1^2)$，

∴7:50之后出发，并选择坐公交车，有50%以上的可能性会超过10 min，即8点之后到校，会迟到，故选项B正确.

由图可知，$P(X\leqslant 18)<P(Y\leqslant 18)$，$P(X\leqslant 13)>P(Y\leqslant 13)$，应选择在给定的时间内不迟到的概率大的交通工具.

∴小明早上7:42出发，有18 min可用，则应选择骑自行车，故选项C正确.

小明早上7:47出发，只有13 min可用，则应选择坐公交车，故选项D正确. 故正确选项为BCD.

10.【答案】ACD

【解析】由$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$可得$2\sqrt{2}\cos B=2$，

$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\because 0<\angle ABC<180^\circ$，$\therefore \angle ABC=45^\circ$，故选项A正确.

连接AC，在$\triangle ABC$中，$AC^2=2^2+(\sqrt{2})^2-2\times 2\times\sqrt{2}\cos 45^\circ=2$，$\therefore AC=\sqrt{2}$，故选项B错误.

$\because AC=BC=\sqrt{2}$，$AB=2$，$\therefore \angle ACB=90^\circ$，

在四边形$ABCD$中，$\because \angle DAB+\angle DCB=180^\circ$，

$\therefore A,B,C,D$四点共圆.

连接BD，$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

$\therefore AD=AB\cos A=1$，$BD=AB\sin A=\sqrt{3}$，故选项C正确.

$\triangle ADC$的面积$S=\frac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$，故正确选项为ACD.

11.【答案】BCD

【解析】令$f(x)=\sin(2\pi x)+x$，满足$f(x+1)>f(x)$，但$f(x)$在$\mathbf{R}$上不是增函数，故选项A错误.

令$x_1=x$，$x_2=-x$，则$|f(x)+f(-x)|\leqslant|\sin x+\sin(-x)|=0$，$\therefore f(x)+f(-x)=0$，即$f(x)=-f(-x)$，∴函数$f(x)$是奇函数，故选项B正确.

$\because \forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|\sin x_1-\sin x_2|$，$\therefore |f(x)-f(x+2\pi)|\leqslant|\sin x-\sin(x+2\pi)|=0$，$\therefore f(x)-f(x+2\pi)=0$，即$f(x)=f(x+2\pi)$，$\therefore f(x)$是周期函数，故选项C正确.

任取$-1<x_1<x_2<1$，$\because y=\sin x$在区间$(-1,1)$上单调递增，$\therefore \sin x_1<\sin x_2$，

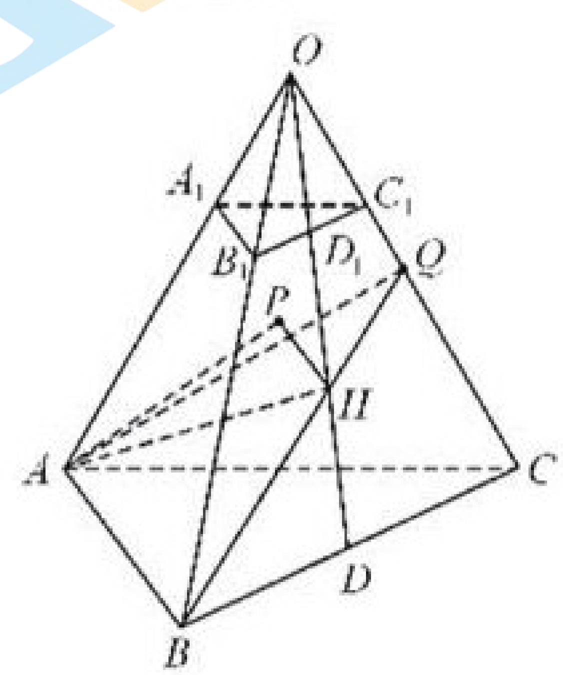
$\therefore |\sin x_1-\sin x_2|=\sin x_2-\sin x_1$，

$\therefore |f(x_1)-f(x_2)|<\sin x_2-\sin x_1$，

$\therefore \sin x_1-\sin x_2<f(x_1)-f(x_2)<\sin x_2-\sin x_1$，$\therefore f(x_2)-\sin x_2<f(x_1)-\sin x_1$且$f(x_1)+\sin x_1<f(x_2)+\sin x_2$，∴函数$f(x)+\sin x$在区间$(-1,1)$上单调递增，函数$f(x)-\sin x$在区间$(-1,1)$上单调递减，故选项D正确. 故正确选项为BCD.

12.【答案】CD

【解析】依题意，如图，延长正三棱台侧棱相交于点O，$\therefore OA=OB=OC$.

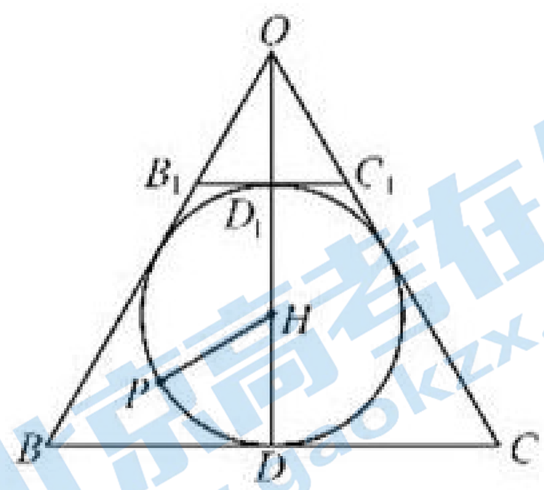


在等腰梯形BCC_1B_1中，由$BC=6$，$B_1C_1=2$，$BB_1=CC_1=4$，易知$\angle B_1BC=\angle C_1CB=60^\circ$.

$\therefore \triangle OBC$为等边三角形，三棱锥$O\text{-}ABC$为正四面体，$OB_1=2$.

如图，设 H 为等边 $\triangle OBC$ 的中心，易证 $AH\perp$ 侧面 OBC，$\therefore AH=\sqrt{6^2-\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2}=2\sqrt{6}$，

$\therefore O$ 点到底面 ABC 的距离为 $2\sqrt{6}$，又 $OB_1=2$，$BB_1=4$，$\therefore$ 正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高为 $\frac{2}{3}\times 2\sqrt{6}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，故选项 A 错误.



$\because AP$ 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为 $2\sqrt{2}$，即 $\tan\angle APH=\frac{AH}{HP}=\frac{2\sqrt{6}}{HP}=2\sqrt{2}$，$\therefore HP=\sqrt{3}$.

正好为等边 $\triangle OBC$ 的内切圆半径，$\therefore$ 点 P 的轨迹长度为 $2\sqrt{3}\pi$，故选项 B 错误.

$\because$ 正三棱台 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的高 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$\triangle A_1B_1C_1$ 的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{\sqrt{3}}{6}$，$\therefore$ 可以放入，故选项 C 正确.

设正四面体 $O\text{-}ABC$ 的内切球半径 r，

则 $\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times 2\sqrt{6}=4\times\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot r$，解得 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\because 2r<\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$ 该棱台内最大的球即为正四面体 $O\text{-}ABC$ 的内切球.

$\because \overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{QC_1}$，$CC_1=4$，$OC=6$，$\therefore Q$ 为 OC 的中点，过点 A,B,Q 的平面正好过该内切球的球心，故截面面积为 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\pi=\frac{3}{2}\pi$，故选项 D 正确. 故正确选项为 CD.

13.【答案】2

【解析】依题意，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot[t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}]=t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+(1-t)\boldsymbol{b}^2=\frac{1}{2}t+1-t=0$，解得 $t=2$.

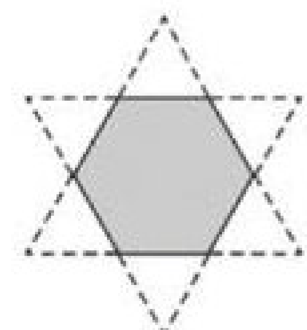
14.【答案】243

【解析】$\because (x+1)^5=C_5^0+C_5^1x+C_5^2x^2+\cdots+C_5^5x^5$，$\therefore a_0=a_5=C_5^0$，$a_1=a_4=C_5^1$，$a_2=a_3=C_5^2$，

$\therefore (1+x)^5=a_5+a_4x+a_3x^2+a_2x^3+a_1x^4+a_0x^5$，令 $x=2$ 得 $a_5+2a_4+4a_3+8a_2+16a_1+32a_0=3^5=243$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{2}}{18}$

【解析】如图，依题意可得，绕高旋转 60° 后，与原底面重合部分为正六边形.



$\because$ 正三角形的边长为 1，

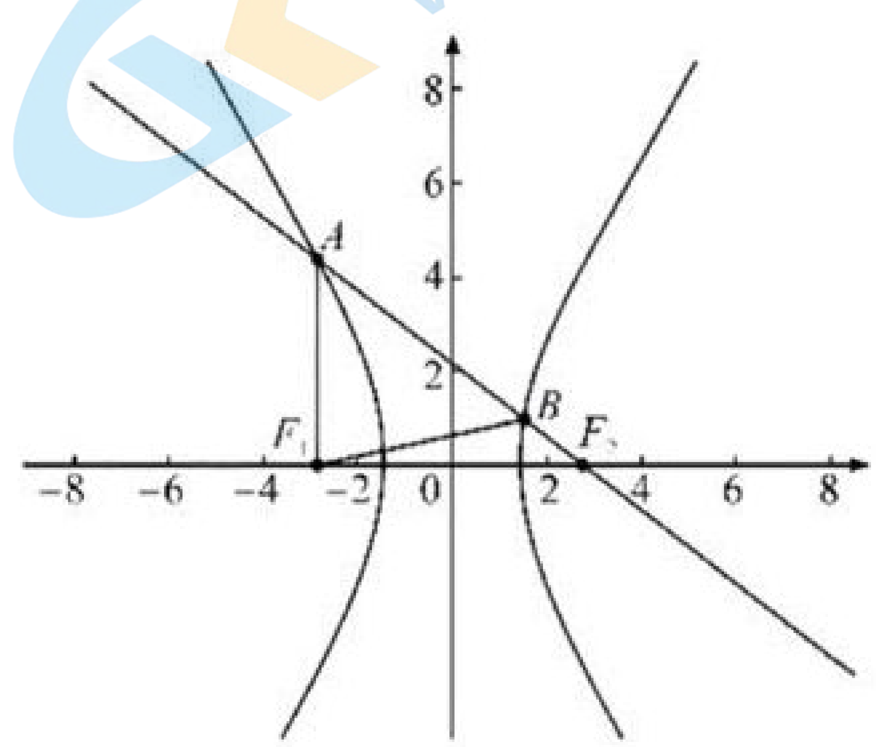
$\therefore$ 正六边形的边长为 $\frac{1}{3}$，面积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

又易知各棱长均为 1 的三棱锥的高为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore$ 公共区域的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{18}$.

16.【答案】2

【解析】如图，$\because AF_1=BF_1=2\sqrt{5}$，$AF_2-AF_1=2a=BF_1-BF_2$，



$\therefore AF_2=2\sqrt{5}+2a$，$BF_2=2\sqrt{5}-2a$，

$\therefore AB=AF_2-BF_2=4a$.

$\because$ 以双曲线的顶点为圆心，半径为 $2\sqrt{2}$ 的圆恰好经过双曲线虚轴的端点，

∴ $a^2-b^2=(2\sqrt{2})^2=c^2$, ∴ $c^2=8$, ∴ $F_1F_2=4\sqrt{2}$.

在△BF_1F_2中,

$$\cos\angle F_1BF_2=\frac{(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{5}-2a)^2-(4\sqrt{2})^2}{2\times2\sqrt{5}\times(2\sqrt{5}-2a)}$$

$$=\frac{8-8\sqrt{5}a+4a^2}{4\sqrt{5}(2\sqrt{5}-2a)},$$

在△AF_1B中, $\cos\angle ABF_1=\frac{2a}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$.

∵ $\angle F_1BF_2=\pi-\angle ABF_1$,

∴ $\cos\angle F_1BF_2=-\cos\angle ABF_1$,

∴ $\frac{8-8\sqrt{5}a+4a^2}{4\sqrt{5}(2\sqrt{5}-2a)}=-\frac{\sqrt{5}}{5}a$, 解得 $a^2=2$.

∴ $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=2$.

17. 解:(1)∵ $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$,

∴ $f'(x)=\omega A\cos(\omega x+\varphi)$.

根据 $f'(0)>0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增,由图可知 $\begin{cases}A=1,\\ \omega=2.\end{cases}$ ……………………… 2分

∴ $f(x)=\sin(2x+\varphi)$, 则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$.

∴ $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$.

∴ $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

∵ $0<\varphi<\pi$, ∴ $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

此时 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ……………… 5分

(2)当 $x\in(0,m)$ 时, $2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},2m+\frac{\pi}{3}\right)$.

∵ $f(x)$ 在区间 $(0,m)$ 上恰有2个极值和2个零点,

∴ $2\pi<2m+\frac{\pi}{3}\leq\frac{5}{2}\pi$,

∴ $\frac{5}{6}\pi<m\leq\frac{13}{12}\pi$.

∴ m 的取值范围为 $\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{13}{12}\pi\right]$. ………… 10分

18. 证明:(1)∵四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形,

∴ $A_1C_1\perp B_1D_1$.

又 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, $A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

∴ $BB_1\perp A_1C_1$.

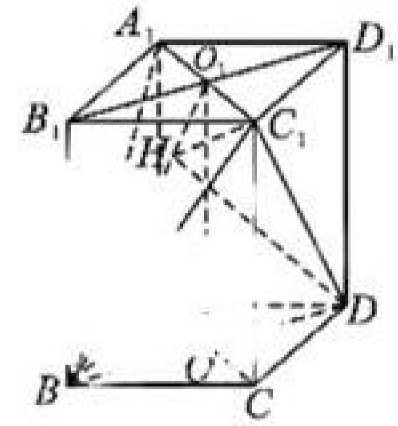
∵ $B_1D_1\cap BB_1=B_1$, $B_1D_1, BB_1\subset$ 平面 BDD_1B_1,

∴ $A_1C_1\perp$ 平面 BDD_1B_1,

∵ $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1B,

∴平面 $A_1C_1B\perp$ 平面 BDD_1B_1. ………… 4分

(2)方法一:几何法. 如图,连接 AC,设菱形对角线交点分别为 O, O_1,连接 BO_1, OO_1,过 D 点作 $DH\perp BO_1$ 于点 H,连接 HC_1.



∵平面 $BDD_1B_1\cap$ 平面 $A_1C_1B=BO_1$,

∴ $DH\subset$ 平面 BDD_1B_1,

由(1)知, $A_1C_1\perp$ 平面 BDD_1B_1, ∴ $A_1C_1\perp DH$.

∵ $BO_1\subset$ 平面 A_1C_1B, $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1B,

∴ $DH\perp$ 平面 A_1C_1B, 则 $\angle DC_1H$ 为直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成的角.

∵ $AA_1=2\sqrt{3}$, $AB=AC=2$,

∴ $BO=\sqrt{3}$, ∴ $BD=2\sqrt{3}$,

∴ $\sin\angle DBH=\frac{DH}{BD}=\frac{DH}{2\sqrt{3}}$.

∵ $BO=\sqrt{3}$, $OO_1=AA_1=2\sqrt{3}$, ∴ $BO_1=\sqrt{15}$,

∴ $\sin\angle DBO_1=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, ∴ $DH=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

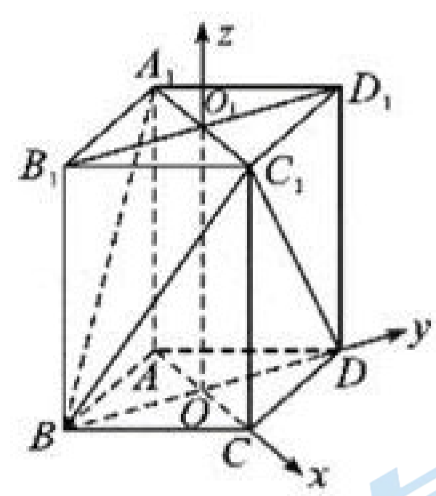
∵ $DC_1=\sqrt{DC^2+CC_1^2}=4$,

∴ $\sin\angle DC_1H=\frac{DH}{DC_1}=\frac{\sqrt{15}}{5}$,

∴直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. …………………………………… 12分

方法二:向量法. 连接 AC,设菱形对角线交点分

别为 O,O_1，连接 OO_1，依题意可知，$OO_1\perp$平面 $ABCD$，以 O 为原点，OC,OD,OO_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



$\because AA_1=2\sqrt{3}, AB=AC=2$，$\therefore BO=\sqrt{3}=DO$.

$\therefore B(0,-\sqrt{3},0)$，$A_1(-1,0,2\sqrt{3})$，$C_1(1,0,2\sqrt{3})$，$D(0,\sqrt{3},0)$.

$\therefore \overrightarrow{BC_1}=(1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BA_1}=(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{C_1D}=(-1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$. ………………… 8 分

设平面 A_1C_1B 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0,\\ -x+\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(0,2,-1)$， ……………………… 10 分

设直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 的夹角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{C_1D},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{C_1D}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{C_1D}||\boldsymbol{n}|}=$

$\dfrac{2\times\sqrt{3}+1\times2\sqrt{3}}{4\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

$\therefore$直线 DC_1 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ……………………………… 12 分

19. 解：(1)补充表格如下：

了解程度	性别		合计
	男性	女性	
比较了解	60	60	120
不太了解	20	40	60
合计	80	100	180

……………………………………………… 2 分

零假设为 H_0：了解程度与性别无关.

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\dfrac{180\times(60\times40-60\times20)^2}{120\times60\times80\times100}=\dfrac{9}{2}=4.5<5.024$，

根据小概率值 $\alpha=0.025$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即了解程度与性别无关. ……………… 4 分

(2)用分层抽样在不太了解的 60 人中抽取 12 人，抽得女性 8 人，男性有 4 人.

X 的可能取值为 0,2,4,6. ……………… 6 分

则 $P(X=0)=\dfrac{C_8^3C_4^3}{C_{12}^6}=\dfrac{8}{33}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_8^4C_4^2+C_8^2C_4^4}{C_{12}^6}=\dfrac{16}{33}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_8^5C_4^1}{C_{12}^6}=\dfrac{8}{33}$，

$P(X=6)=\dfrac{C_8^6C_4^0}{C_{12}^6}=\dfrac{1}{33}$.

X 的分布列为：

X	0	2	4	6
P	$\dfrac{8}{33}$	$\dfrac{16}{33}$	$\dfrac{8}{33}$	$\dfrac{1}{33}$

……………………………………………………… 10 分

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{8}{33}+2\times\dfrac{16}{33}+4\times\dfrac{8}{33}+6\times\dfrac{1}{33}=$

$\dfrac{70}{33}$. ……………………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意可得 $a=\sqrt{2}$，$a-c=\sqrt{2}-1$，

$\therefore c=1$，$\therefore b=1$，

$\therefore$椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………… 3 分

(2)若圆 O 的切线 $AC\perp x$ 轴，

则 $|AC|=\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{2}$，不满足题意. …… 4 分

设直线 AC 的方程为 $y=kx+m$，

$\because$直线 AC 与圆 O 相切，

$\therefore \dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

$\therefore m^2=k^2+1$，…………………………………… 5 分

联立 $y=kx+m$ 与 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

消 y 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$. … 7 分

∵O 到直线 AC 的距离为 1，

则 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=2\times\frac{1}{2}|AC|\times 1$

$=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2-m^2+1}}{1+2k^2}$

$=\frac{4}{3}$，

将 $m^2=k^2+1$ 代入消 m 可得

$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}|k|}{1+2k^2}=\frac{4}{3}$，………………… 10 分

化简可得 $k^4+k^2-2=0$，

解得 $k^2=1$(负值舍去)，………………… 11 分

∴$k=\pm1$，故直线 AC 的斜率为 1 或 -1. ……

………………………………………… 12 分

21. 解：(1)设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q\neq0)$，

依题意可得 $a_1=1$，$b_1=2$，

$\begin{cases}2q=1+1+2d,\\2\times2q^2=5(1+2d)+1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}d=1,\\q=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=-\frac{1}{2},\\q=\frac{1}{2}\end{cases}$ (舍去).

∴$a_n=n$，$b_n=2^n$. ………………………… 4 分

(2)新数列中 b_{n+1} 之前的所有项中，含有 $\{a_n\}$ 中的项共有 $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 项，

∴$T_n=\frac{(1+2^n-1)(2^n-1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{2n-1}+3\cdot2^{n-1}-2$，………………………… 6 分

∴$d_n=\frac{n^2}{n+1}\left(\frac{1}{2^n+3}+2\right)=\frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)}+\frac{2n^2}{n+1}=\frac{n^2}{(n+1)(2^n+3)}+\frac{2}{n+1}+2(n-1)$

$=\frac{n^2+2(2^n+3)}{(n+1)(2^n+3)}+2(n-1)$. ………… 7 分

下证当 $n\geqslant2$ 时，$0<\frac{n^2+2(2^n+3)}{(n+1)(2^n+3)}<1$.

$(n+1)(2^n+3)-n^2-2(2^n+3)=(n-1)2^n-n^2+3n-3$，

∵$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$，

∴当 $n\geqslant2$ 时，$2^n\geqslant n+2$，

∴$(n-1)2^n-n^2+3n-3\geqslant(n-1)(n+2)-n^2+3n-3=4n-5>0$.

∴当 $n\geqslant2$ 时，$0<\frac{n^2+2(2^n+3)}{(n+1)(2^n+3)}<1$，

故 $[d_n]=2(n-1)$； ……………………… 9 分

当 $n=1$ 时，$d_1=\frac{11}{10}$，∴$[d_1]=1$. ……… 10 分

∴$[d_1]+[d_2]+[d_3]+\cdots+[d_n]=1+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]=n^2-n+1\leqslant2\ 023$，……

………………………………………… 11 分

∴$n^2-n=n(n-1)\leqslant2\ 022$，满足不等式的最大正整数 $n=45$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)$f'(x)=-\ln(x+1)-2$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1+\frac{1}{e^2}$，

当 $x\in\left(-1,-1+\frac{1}{e^2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in\left(-1+\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，

∴$f(x)$ 在区间 $\left(-1,-1+\frac{1}{e^2}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(-1+\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 上单调递减，……… 2 分

令 $m(x)=x\ln x$，

∴$x\to0$ 时，可令 $x=e^{-t}$，$t\to+\infty$.

此时 $m(x)=-te^{-t}$，易知 $t\to+\infty$ 时，$m(x)\to0$.

∴当 $x\to-1$ 时，$y=(x+1)\ln(x+1)\to0$，

∴$f(x)\to3a+1$，

$\because 1\leqslant a\leqslant 6$，$\therefore 3a+1>0$，即 $f(x)$ 在区间 $\left(-1,-1+\frac{1}{e^2}\right)$ 上无零点. ………………… 3 分

又 $f(1)=3a-1-2\ln 2\geqslant 3\times 1-1-2\ln 2>0$，

$f(e^2-1)=3a-(e^2-1)-2e^2=3a+1-3e^2\leqslant 3\times 6+1-3e^2<0$，

$\therefore \exists x_1\in(1,e^2-1)$ 使得 $f(x_1)=0$，

即 $f(x)$ 在区间 $\left(-1+\frac{1}{e^2},+\infty\right)$ 上有一个零点，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点个数为 1. ……………… 4 分

(2)①由(1)可知，函数 $f(x)$ 有唯一零点 x_1，且 $x_1>1$. 下面判断函数 $g(x)$ 的极值点情况，

$g'(x)=a^2e^x+(2-a)x-3a\,(x>-1)$，

令 $h(x)=g'(x)$，

则 $h'(x)=a^2e^x+2-a\,(x>-1)$，

当 $1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $2<a\leqslant 6$ 时，$h'(x)>a^2e^{-1}+2-a>\frac{2^2}{e}+2-2=\frac{4}{e}>0$，

$\therefore h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，当 $1\leqslant a\leqslant 6$ 时，$h(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………… 6 分

$\because h(-1)=\frac{a^2}{e}-2a-2$，

令 $r(a)=\frac{a^2}{e}-2a-2$，$r'(a)=\frac{2a}{e}-2$，

令 $r'(a)=0$，解得 $a=e$.

$\because 1\leqslant a\leqslant 6$，$\therefore r(a)$ 在区间 $[1,e)$ 上单调递减，在区间 $[e,6]$ 上单调递增，

$\because r(1)=\frac{1}{e}-4<0$，$r(6)=\frac{36}{e}-14<0$，

$\therefore h(-1)<0$，

又 $h(1)=a^2e-4a+2>1^2\times e-4\times 1+2=e-2>0$，

$\therefore \exists x_2\in(-1,1)$ 使得 $h(x_2)=0$，

即 $g'(x_2)=0$，

且当 $x\in(-1,x_2)$ 时，$h(x_2)=g'(x_2)<0$，

当 $x\in(x_2,1)$ 时，$h(x_2)=g'(x_2)>0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(-1,x_2)$ 上单调递减，在区间 $(x_2,1)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，函数 $g(x)$ 存在唯一的极值点 x_2，且 $-1<x_2<1$.

综上，$-1<x_2<1<x_1$. …………………… 8 分

②$\because f(x_1)=g'(x_2)=0$，要证 $f(x_2)<g'(x_1)$，

即证 $f(x_2)+g'(x_2)<f(x_1)+g'(x_1)$，

令 $\varphi(x)=f(x)+g'(x)=a^2e^x+(1-a)x-(x+1)\ln(x+1)$，

下证 $\varphi(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，即证 $\varphi'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\varphi'(x)=a^2e^x-a-\ln(x+1)=a^2e^x+1-1-a-\ln(x+1)\geqslant 2\sqrt{a^2e^x\times 1}-1-a-\ln(x+1)=2ae^{\frac{x}{2}}-1-a-\ln(x+1)=a(2e^{\frac{x}{2}}-1)-1-\ln(x+1)$，

$\because x>-1$，$\therefore 2e^{\frac{x}{2}}-1>2e^{-\frac{1}{2}}-1>0$，

令 $u(a)=a(2e^{\frac{x}{2}}-1)-1-\ln(x+1)$，

则 $u(a)$ 在区间 $[1,6]$ 上单调递增，

$\therefore u(a)\geqslant u(1)=2e^{\frac{x}{2}}-2-\ln(x+1)$， … 10 分

令 $v(x)=2e^{\frac{x}{2}}-2-\ln(x+1)$，

则 $v'(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{x+1}$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，且 $v'(0)=0$，

故 $v(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 上单调递减，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore v(x)\geqslant v(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x>-1$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore \varphi(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

$\because -1<x_2<1<x_1$，

$\therefore \varphi(x_2)<\varphi(x_1)$，原命题得证. ………… 12 分

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析	易	中	难
选择题	1	5	集合的运算		√			√		√		
选择题	2	5	复数的运算		√			√		√		
选择题	3	5	充要条件		√					√		
选择题	4	5	直线与圆相交问题		√			√		√		
选择题	5	5	抛物线的性质		√			√		√		
选择题	6	5	全概率公式的应用	√		√					√	
选择题	7	5	函数比较大小		√			√			√	
选择题	8	5	斐波那契数列的应用	√	√	√					√	
选择题	9	5	正态分布	√					√	√		
选择题	10	5	解四边形		√			√		√		
选择题	11	5	函数的基本性质	√	√						√	
选择题	12	5	正三棱台		√		√	√				√
填空题	13	5	向量的运算		√			√		√		
填空题	14	5	二项式展开式的系数和		√			√		√		
填空题	15	5	正三棱锥的体积				√	√			√	
填空题	16	5	双曲线的几何性质	√	√			√				√
解答题	17	10	三角函数的图象与性质		√			√		√		
解答题	18	12	线面角				√	√		√		
解答题	19	12	χ^2独立性检验、概率分布列		√			√	√	√		
解答题	20	12	椭圆、面积计算	√	√			√			√	
解答题	21	12	等差数列等比数列综合、数列求和，不等式	√	√			√			√	
解答题	22	12	导数，与零点有关的证明	√	√			√				√

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！