

北京中学 2022-2023 学年度第一学期考试

期中考试数学试题

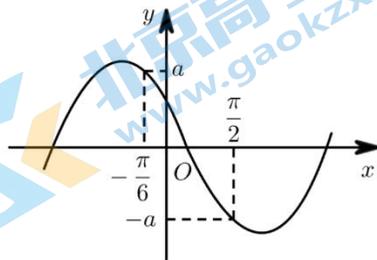
本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 50 分)

一、选择题(共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | x + y \leq 2, x, y \in N\}$ ，则 A 中元素的个数为 ()
A. 1 B. 5 C. 6 D. 无数个
2. 下列函数中，是奇函数且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()
A. $f(x) = \tan x$ B. $f(x) = \sqrt{x}$ C. $f(x) = x|x|$ D. $f(x) = x^3 + 1$
3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，前 n 项和为 S_n ，则“ $d > 0$ ”是“ $S_4 + S_6 > 2S_5$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 函数 $f(x) = \log_3 x + x - 3$ 的零点所在的区间是
A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3, +∞)
5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_4 = 2a_3 + 6$ ， $a_4 = 7$ ，则 $a_6 =$ ()
A. 9 B. 11 C. 15 D. 17
6. 已知 P 是边长为 2 的正六边形 $ABCDEF$ 内的一点，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 ()
A. (-2,6) B. (-6,2) C. (-2,4) D. (-4,6)
7. $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $c^2 = (a - b)^2 + 6$ ， $C = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

8. 已知函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示，将该函数的图象向左平移 t ($t > 0$) 个单位长度，得到函数 $y = f(x)$ 的图象. 若函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称，则 t 的最小值 ()



- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 2a, & x \leq 1 \\ x - a \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 0$ 在 R 上恒成立, 则 a 的取值范围为 ()

- A. $[0, 1]$ B. $[0, 2]$ C. $[0, e]$ D. $[1, e]$

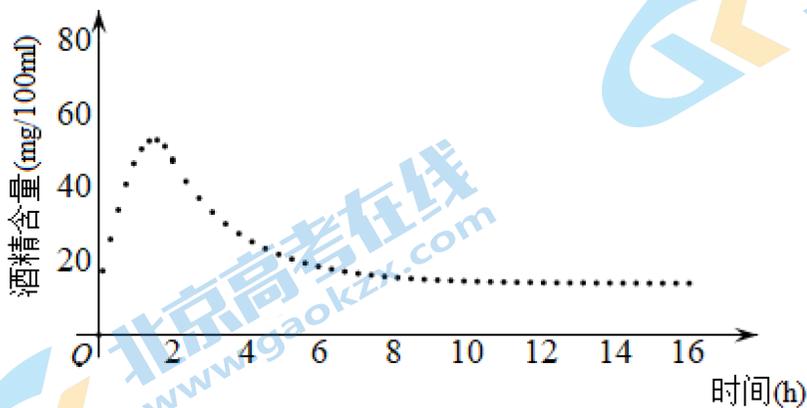
10. 国家质量监督检验检疫局发布的相关规定指出, 饮酒驾车是指车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或者等于 $20\text{mg}/100\text{ml}$, 小于 $80\text{mg}/100\text{ml}$ 的驾驶行为; 醉酒驾车是指车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或者等于 $80\text{mg}/100\text{ml}$ 的驾驶行为. 一般的, 成年人喝一瓶啤酒后, 酒精含量在血液中的变化规律的“散点图”如图所示, 且图中的函数模型为:

$$f(x) = \begin{cases} 40\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 13, & 0 \leq x < 2 \\ 90e^{-0.5x} + 14, & x \geq 2 \end{cases}$$

, 假设某成年人喝一瓶啤酒后至少经过 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 小时才

可以驾车, 则 n 的值为 ()

(参考数据: $\ln 15 \approx 2.71$, $\ln 30 \approx 3.40$)



- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题(共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

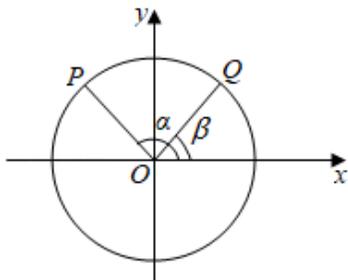
11. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+1}} + \ln x$ 的定义域是_____.

12. 函数 $f(x) = e^x \sin x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处切线的方程为_____.

13. 设 $x, y \in \mathbb{R}$, 且 $x + y = 5$, 则 $3^x + 3^y$ 的最小值为_____.

14. 已知平面向量 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$ _____; 若平行四边形 $ABCD$ 满足 $\vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}$, 则平行四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

15. 如图, 以 Ox 为始边作钝角 α , 角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x_1, y_1)$, 将角 α 的终边顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到角 β . 角 β 的终边与单位圆相交于点 $Q(x_2, y_2)$, 则 $x_2 - x_1$ 的取值范围为_____.



16. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x(3-x), & x \in [0, 3] \\ 1 - \frac{3}{x}, & x \in (3, +\infty) \end{cases}$, 若函数

$y = f(x) - m$ 恰有 4 个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为_____.

三、解答题(共 5 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

17. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{1}{7}$, $c = 8$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(1) b 的值;

(2) 角 A 的大小和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a = 7$; 条件②: $\cos B = \frac{11}{14}$.

注: 如果选择条件①、条件②分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本题满分 14 分) 已知向量 $\vec{a} = (\sin x, \cos x)$, $\vec{b} = (\cos x, -\cos x)$, 设函数 $f(x) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期, 对称中心, 对称轴;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - k$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 其中 $k \in \mathbf{R}$, 试讨论函数 $g(x)$ 的零点个数.

19. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ 的图象过点 $(-1, -6)$, 且函数 $g(x) = f'(x) + 6x$ 是偶函数.

(1) 求 m, n 的值及函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $a > 0$, 求函数 $y = f(x)$ 在区间 $(a-1, a+1)$ 内的极值.

20. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - a}{\sin x} - 2 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线经过坐标原点, 求实数 a ;

(2) 当 $a > 0$ 时, 判断函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, \pi)$ 上的零点个数, 并说明理由.

21. (本题满分 14 分) 已知数集 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n, n \geq 2)$ 具有性质 P ;

对任意的 $i, j (1 \leq i \leq j \leq n)$, $a_i a_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A .

(1) 分别判断数集 $\{1, 3, 4\}$ 与 $\{1, 2, 3, 6\}$ 是否具有性质 P , 并说明理由;

(2) 证明: $a_1 = 1$, 且 $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}} = a_n$;

(3) 证明: 当 $n = 5$ 时, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 成等比数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯