汕头市 2023-2024 学年度普通高中毕业班期中调研测试

数学参考答案及评分标准

一、单选题（每道 5 分，共 40 分）．

1	2	3	4	5	6	7	8
D	D	C	A	C	A	D	B

二、多选题（全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分，共 20 分）．

9	10	11	12
ACD	BC	AD	ABC

三、填空题（每道 5 分，共 20 分）

13. $r_2 < r_4 < 0 < r_3 < r_1$　　14. 9　　15. $60° / \dfrac{\pi}{3}$（$120°$或$\dfrac{2\pi}{3}$不得分奖励）

16. ① 2；　② $7-3\sqrt{3}$（第一个空 2 分，第二个空 3 分）

四、解答题（每道 5 分，共 20 分）

17.（1）$a_n=(2n-1)a_1$，$n\in N^*$

（2）裂项相消求和，不等式恒成立，详见解析。

解：（1）由题意得，$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}+(n-1)\sqrt{a_1}=n\sqrt{a_1}$

$\because a_n>0 \therefore S_n=n^2\cdot a_1$

当$n=1$时，$a_1=a_1$恒成立；

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2\cdot a_1-(n-1)^2\cdot a_1=(2n-1)\cdot a_1$

经检验，$n=1$时，$a_1=a_1$符合上式；

即$a_n=(2n-1)\cdot a_1$

（2）由（1）得，$a_n=(2n-1)\cdot a_1$，因此，当$a_1=1$时，$a_n=2n-1$，

则$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

因此$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)==\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$

$\because n\in N^*$，$\therefore \frac{1}{4n+2}>0$；即$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}<\frac{1}{2}$

18.（1）$DE=\frac{1}{2}$；（2）$\frac{8\sqrt{13}}{39}$

解：（1）由题意，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，DA，DC，DD_1两两垂直，以 D 点为坐标原点，分别以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$的方向为$x$，$y$，$z$轴的正方向，建立空间直角坐标系，如图所示：设$DE=a$，则$A_1(1,0,1)$，$E(0,\ a,0)$，$A(1,0,0)$，$B_1(1,2,1)$，$D_1(0,0,1)$，

$\therefore AB_1=(0,2,1)$，$AD_1=(-1,0,1)$，$A_1E=(-1,\ a,-1)$

设$\vec{m}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$为平面$AB_1D_1$法向量，则$\vec{m}\perp\overrightarrow{AB_1}$，$\vec{m}\perp\overrightarrow{AD_1}$，

$\therefore \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，即$\begin{cases}2y_1+z_1=0\\-x_1+z_1=0\end{cases}$，令$z_1=2$，则$x_1=2$，$y_1=-1$，

$\therefore$平面AB_1D_1的一个法向量为$\vec{m}=(2,-1,2)$，

若$A_1E\perp$平面AB_1D_1，则$\overrightarrow{A_1E}=\lambda\vec{m}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$，

$\because A_1E=(-1,\ a,-1)$，$\therefore\begin{cases}-1=2\lambda\\a=-\lambda\\-1=2\lambda\end{cases}$，解得$\lambda=-\frac{1}{2}$，$a=-\lambda=\frac{1}{2}$，即$DE=\frac{1}{2}$

（2）由（1）得，$B(1,2,0)$，$B_1(1,2,1)$，$E\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$\therefore\overrightarrow{BB_1}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{BE}=\left(-1,-\frac{3}{2},0\right)$；

设$\vec{n}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$为平面$BB_1E$法向量，则$\vec{n}\perp\overrightarrow{BB_1}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{BE}$，

$\therefore \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0, \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，即 $\begin{cases} z_2=0 \\ -x_2-\dfrac{3}{2}y_2=0 \end{cases}$，令 $y_2=2$，则 $x_2=-3$，

$\therefore$ 平面 BB_1E 的一个法向量为 $\vec{n}=(-3,2,0)$，$|\vec{n}|=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$

设平面 BB_1E 与平面 AB_1D_1 所成角为 θ，由题意，θ 为锐角；

由（1）得平面 AB_1D_1 的一个法向量 $\vec{m}=(2,-1,2)$，$|\vec{m}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|(-3)\times 2+2\times(-1)+0\times 2|}{\sqrt{13}\times 3}=\dfrac{8\sqrt{13}}{39}$

19.（1）0.006；（2）合理。

解：（1）将 10 个病人服用新药视为 10 重伯努利试验，在每次试验中，每个病人痊愈的概率为 $\dfrac{4}{5}$，且每个病人是否痊愈是相互独立的，设 X 代表这 10 个病人中痊愈的人数，则 $X\sim B\left(10,\dfrac{4}{5}\right)$，设 $B=$“经过试验该药物被认定为无效”，则事件 B 发生的概率 p 等价于 $P=(X\le 4)$，即

$$p=P=(X\le 4)$$

$$=C_{10}^0\left(\frac{4}{5}\right)^0\left(\frac{1}{5}\right)^{10}+C_{10}^1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^9+C_{10}^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^8+C_{10}^3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^7+C_{10}^4\left(\frac{4}{5}\right)^4\left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$=C_{10}^0\frac{1}{5^{10}}+C_{10}^1\frac{2^2}{5^{10}}+C_{10}^2\frac{2^4}{5^{10}}+C_{10}^3\frac{2^6}{5^{10}}+C_{10}^4\frac{2^8}{5^{10}}$$

$$=\frac{C_{10}^0 1+C_{10}^1 2^2+C_{10}^2 2^4+C_{10}^3 2^6+C_{10}^4 2^8}{5^{10}}$$

$$=\frac{62201}{9765625}\approx 0.006$$

即经过试验该药物被认定为无效 的概率约为0.006；

（2）由题意，实际上该药物是有效的，当痊愈的病人数达不到 5 人时，认定新药无效，此时做出了错误的判断.由（1）得做出该错误判断的概率仅为 0.006，故该试验方案是合理的。

20.（1）$-\frac{\sqrt{2}}{4}$；（2）$\frac{\sqrt{10}}{2}$。

解：（1）由题意，∵点 E 是 AD 的中点，∴ AE 是 BD 边上的中线，则

$$AE=\left|\overrightarrow{AE}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AD^2+2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD}$$

若 $EC=1$，代入：$AE=2EC=2$，$AB=4$，$AD=2\sqrt{2}$，解得 $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

（2）若 $\angle ABD=\frac{\pi}{4}$，在△ABD 中，由余弦定理，得 $AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos\angle ABD$，

代入 $\angle ABD=\frac{\pi}{4}$，$AB=4$，$AD=2\sqrt{2}$，解得 $BD=2\sqrt{2}$，则 $AE=\frac{1}{2}\sqrt{2AB^2+2AD^2-BD^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot4^2+2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{10}$，$CE=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{10}}{2}$

由题意，∵点 E 是 AD 的中点，∴ $BE=DE=\sqrt{2}$

在△AED 中，由余弦定理，得 $\cos\angle AED=\frac{AE^2+DE^2-AD^2}{2AE\cdot DE}=\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}$

$$=\frac{4}{2\cdot2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

∴在△BCE 中，∠BEC=∠AED，即 $\cos\angle BCE=\cos\angle AED=\frac{\sqrt{5}}{5}$

在△BCE 中，由余弦定理，得 $BC^2=BE^2+CE^2-2BE\cdot CE\cdot\cos\angle BEC$

$$BC^2=BE^2+CE^2-2BE\cdot CE\cdot\cos\angle AED,$$

即 $BC^2=\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$BC^2=2+\frac{5}{2}-2=\frac{5}{2}$$

即 $BC=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

21.（1）$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$；（2）$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$。

解：（1）由题意，得$\begin{cases}2b=4\\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ a^2-b^2=c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\sqrt{6}\\ b=2\end{cases}$，故椭圆的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$；

（2）由题意知，$k\neq 0$，直线 l 的方程为$y=kx+1$，则$G=\left(-\frac{1}{k},0\right)$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，

可得到：$\left(2+3k^2\right)x^2+6kx-9=0$，$\triangle=36k^2+36\left(2+3k^2\right)>0$，设交点$C(x_1,\ y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{-6k}{2+3k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{-9}{2+3k^2}$，

则 CD 的中点的横坐标为$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-3k}{2+3k^2}$，

$\because E=(0,1)$，$G=\left(-\frac{1}{k},0\right)$，则 EG 中点横坐标为$-\frac{1}{2k}$，

又$\because \left|\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{DE}\right|$，且 C，E，G，D 四点共线，取 EG 中点 H，则$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{HE}$

$\therefore \overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{HE}$，即$\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{DH}$，$\therefore$H 是 CD 的中点，即 CD 和 EG 的中点重合，即$\frac{-3k}{2+3k^2}=-\frac{1}{2k}$，解得$k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

22.（1）单调增区间为$[-1,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,-1)$；（2）$a=\frac{4}{e^2}$

解：（1）由题意，明显的，$a\neq 0$，则$f(x)=ae^x$，且$f'(x)=ae^x(x\in R)$，

又$\because f(1)=ae$，$\therefore$在$x=1$处的切线范围为$y-ae=ae(x-1)$，切线过点$(3,3)$，

代点$(3,3)$入直线方程，解得$a=\frac{1}{e}$，故$f(x)=e^{x-1}$

则$y=xf(x)=xe^{x-1},(x\in R)$，$y'=e^{x-1}+xe^{x-1}=(1+x)e^{x-1},(x\in R)$，

其中$e^{x-1}>0$恒成立；令$y'\geq 0$，得$1+x\geq 0$，解得$x\geq -1$，

因此$y=xf(x)=xe^{x-1},(x\in R)$单调增区间为$[-1,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,-1)$

（2）设公切线与两曲线的切点分别为$\left(x_1,\ ae^{x_1}\right)$，$\left(x_2,\ x_2{}^2\right)$，由题意，显然的，$x_1\neq x_2$；

由 $k=ae^{x_1}=2x_2=\dfrac{ae^{x_1}-x_2^2}{x_1-x_2}$，

即 $2x_1x_2-2x_2^2=ae^{x_1}-x_2^2=2x_2-x_2^2$；

$\therefore 2x_1x_2-x_2^2=2x_2$（#）

由 $a>0$，故 $x_2>0$，（#）约 x_2，整理得 $x_2=2x_1-2$

$\therefore 2x_1-2>0$，故 $x_1>1$

由 $k=ae^{x_1}=2x_2$，得 $a=\dfrac{2x_2}{e^{x_1}}=\dfrac{4(x_1-1)}{e^{x_1}},(x_1>1)$

构造函数 $F(x)=\dfrac{4(x-1)}{e^x},(x>1)$，

题目要求存在唯一的公切线，即直线 $y=a$ 与曲线 $y=F(x)$ 在 $x>1$ 时有且只有一个交点；

对于 $F(x)=\dfrac{4(x-1)}{e^x},(x>1)$，有 $F'(x)=\left[\dfrac{4(x-1)}{e^x}\right]'=\dfrac{4e^x-4(x-1)e^x}{e^{2x}}=\dfrac{8-4x}{e^x}(x>1)$，

令 $F'(x)\geq 0$，即 $\dfrac{8-4x}{e^x}\geq 0,(x>1)$，

$\because e^x>0$ 恒成立，所以原不等式等价于 $8-4x\geq 0,(x>1)$，即 $1<x\leq 2$，

即当 $1<x\leq 2$ 时，$y=F(x)$ 在单调递增；当 $x>2$ 时，$y=F(x)$ 在单调递减。

即当 $x=2$ 时，$y=F(x)$ 有最大值 $F(2)=\dfrac{4}{e^2}$，

而 $F(1)=0$，$F(x)=\dfrac{4(x-1)}{e^x},(x>1)$ 不难发现恒为正

因此，当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to 0$，

综上，$a=\dfrac{4}{e^2}$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $y=F(x)$ 在 $x>1$ 时有且只有一个交点，对应曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 存在唯一的公切线。