

北京市中关村中学高三年级9月开学考试数学试题

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设全集 $U = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ ，集合 $A = \{x \in \mathbb{R}^+ | x^2 \geq 3\}$ ，则 $C_U A =$ ()

A. $[1, \sqrt{3})$

B. $[1, \sqrt{3}]$

C. $(\sqrt{3}, +\infty)$

D. $[\sqrt{3}, +\infty)$

2. 在复平面内，复数 $z = \frac{1+2i}{i}$ 对应的点位于

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (3, 2)$ ，则 $|\vec{a} - \vec{b}| =$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $5\sqrt{2}$

D. 50

4. 已知 $f(x) = x - \sin x$ ，命题 $p: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) < 0$ ，则 ()

A. p 是假命题， $\neg p: \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) \geq 0$

B. p 是假命题， $\neg p: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) \geq 0$

C. p 是真命题， $\neg p: \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) \geq 0$

D. p 是真命题， $\neg p: \exists x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) \geq 0$

5. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的右焦点重合，则 p 的值为 ()

A. 4

B. 2

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$

6. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x} + 2$ 的值域为 $(-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$, 则 a 的值是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. 2

7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为内角 A, B, C 所对的边, 若 $c^2 = (a-b)^2 + 6$, $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

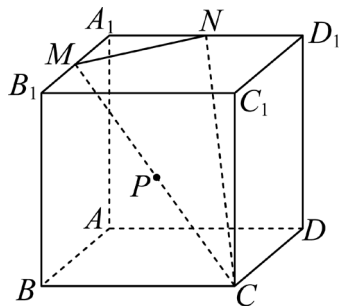
- A. 3 B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $3\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. 若关于 x 的方程,

$f(x) - k = 0$ 有三个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $[-2, -1] \cup [1, 2]$ B. $(-2, -1) \cup (1, 2)$
 C. $(-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2)$ D. $(-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 2)$.

9. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 E 在 BD 上, 点 F 在 B_1C_1 上, 且 $BE = CF$, 点 P 在线段 CM 上运动, 给出下列四个结论:



①当点 E 是 BD 中点时, 直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ;

②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

③存在点 P , 使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$;

④ $\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

其中所有正确结论的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 若函数 $f(x) = x - \frac{1}{3}\sin 2x + a\sin x$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 则 a 的取值范围是

- A. $[-1,1]$ B. $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ C. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ D. $\left[-1, -\frac{1}{3}\right]$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 二项式 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项是_____；二项式系数和是_____.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称，点 $M(x, -1)$ 在角 β 的终边上. 若 $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin\beta =$ _____.

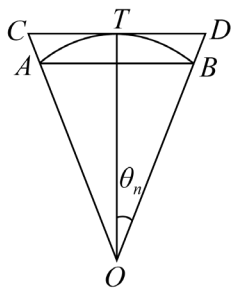
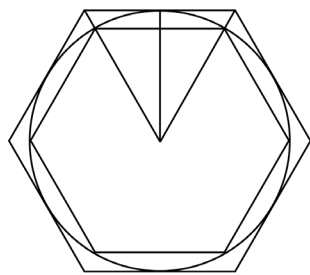
13. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且公差为零，其前 n 项和为 S_n ，则 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $S_{n+1} > S_n$ ” 是 “ $\{a_n\}$ 为递增数列” 的_____条件（填“充分不必要”，“必要而不充分”，“充要”或“既不充分也不必要”）

14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，满足 $f(x+1) = 2f(x)$ ，且当 $x \in (0, 1]$ 时，

$f(x) = x(x-1)$. $f\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____；若对任意 $x \in (-\infty, m]$ ，都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$ ，则 m 的取值范围是_____.

15. 作单位圆的外切和内接正 3×2^n 边形 ($n = 1, 2, \dots$)，记外切正 3×2^n 边形周长的一半为 a_n ，内接正 3×2^n 边形周长的一半为 b_n . 计算可得 $a_n = 3 \times 2^n \tan \theta_n$ ，其中 θ_n 是正 3×2^n 边形的一条边所对圆心角的一半.

给出下列四个结论：



- ① $b_n = 3 \times 2^n \sin \theta_n$ ；② $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}$ ；
③ $b_{n+1}^2 = a_{n+1} b_n$ ；④ 记 $c_n = a_n - b_n$ ，则 $\forall n \in \mathbf{N}_+$ ， $\frac{c_{n+1}}{c_n} < \frac{1}{4}$.

其中正确结论的序号是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分。

16. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + \cos^2 \omega x - \frac{1}{2}$ ，其中 $0 < \omega < 2$ ，有如下三个条件：条件①

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ；条件② $f(x + \pi) = f(x)$ ；条件③ $f\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ 。从以上三个条件中选择一个作为

已知，求解下列问题。

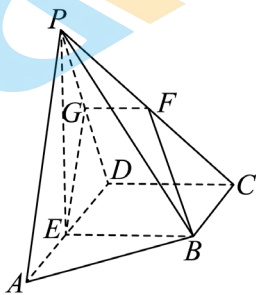
(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上的最大值为 1，求实数 m 的取值范围。

注：如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分。

17. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $BC \parallel AD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ，

$BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$ ， E 为线段 AD 的中点， $PE \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 F 是棱 PC 的中点，平面 BEF 与棱 PD 相交于点 G 。



(1) 求证： $BE \parallel FG$ ；

(2) 若 PC 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$ ，求直线 PB 与平面 BEF 所成角的正弦值。

18. 我国脱贫攻坚战取得全面胜利，现行标准下农村贫困人口全部脱贫，消除了绝对贫困。为了解脱贫家庭人均年纯收入情况，某扶贫工作组对 A, B 两个地区 2019 年脱贫家庭进行简单随机抽样，共抽取 500 户家庭作为样本，获得数据如下表：

	A 地区	B 地区
2019 年人均年纯收入超过 10000 元	100 户	150 户
2019 年人均年纯收入未超过 10000 元	200 户	50 户

假设所有脱贫家庭的人均年纯收入是否超过 10000 元相互独立。

(1) 从 A 地区 2019 年脱贫家庭中随机抽取 1 户，估计该家庭 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的概率；

(2) 在样本中, 分别从 A 地区和 B 地区 2019 年脱贫家庭中各随机抽取 1 户, 记 X 为这 2 户家庭中 2019 年人均年纯收入超过 10000 元的户数, 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 从样本中 A 地区的 300 户脱贫家庭中随机抽取 4 户, 发现这 4 户家庭 2020 年人均年纯收入都超过 10000 元. 根据这个结果, 能否认为样本中 A 地区 2020 年人均年纯收入超过 10000 元的户数相比 2019 年有变化? 请说明理由.

19. 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{1}{2}ax^3 - ax^2 (a \in \mathbb{R})$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最值;

(2) 若 $f(x) \leq \frac{1}{2}ax^3 - x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(3) 若函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 存在两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, 求 $g(x_1) + g(x_2)$ 的取值范围.

20. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过 $A(-2, 0), B(0, 1)$ 两点.

(1) 求椭圆 M 的离心率;

(2) 设椭圆 M 的右顶点为 C , 点 P 在椭圆 M 上 (P 不与椭圆 M 的顶点重合), 直线 AB 与直线 CP 交于点 Q , 直线 BP 交 x 轴于点 S , 求证: 直线 SQ 过定点.

21. 已知有限数列 $\{a_n\}$, 从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、 \dots 、第 i_m 项 ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$), 顺次排列构成数列 $\{b_k\}$, 其中 $b_k = a_{i_k}, 1 \leq k \leq m$, 则称新数列 $\{b_k\}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的子列, 规定: 数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的子列, 若数列 $\{a_n\}$ 的每一子列的所有项的和都不相同, 则称数列 $\{a_n\}$ 为完全数列. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = n, 1 \leq n \leq 25, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 判断下面数列 $\{a_n\}$ 的两个子列是否为完全数列, 并说明由;

数列①: 3, 5, 7, 9, 11; 数列②: 2, 4, 8, 16.

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度为 m , 且 $\{b_k\}$ 为完全数列, 证明: m 的最大值为 6;

(3) 数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度 $m = 5$, 且 $\{b_k\}$ 为完全数列, 求 $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \frac{1}{b_4} + \frac{1}{b_5}$ 的最大值.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜



京考一点通