理科数学（老教材版）答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1．答案　D

命题意图　本题考查复数的基本概念和运算.

解析　$z=\dfrac{3+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-1+4\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=-1-4\mathrm{i}$.

2．答案　C

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　因为 $A=\left\{x\in\mathbf{N}^*\,\middle|\,1\le\log_2 x<3\right\}=\{2,3,4,5,6,7\},\complement_{\mathrm{R}}B=[2,5)$，所以 $A\cap\left(\complement_{\mathrm{R}}B\right)=\{2,3,4\}$.

3．答案　B

命题意图　本题考查平面向量的数量积.

解析　$\vec{a}+\vec{b}=(1,m-4)$，因为 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{c}$，所以 $2+m-4=0$，得 $m=2$.

4．答案　C

命题意图　本题考查数列的概念与性质.

解析　由题意知 $a_n=2n+1,b_n=\dfrac{1}{2}(n-1)$，可知 $a_2=5=b_{11}$.

5．答案　C

命题意图　本题考恒三角形的面积公式和余弦定理.

解析　由题意得 $S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2,S_2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2,S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$，则 $S_1-S_2-S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以 $a^2-b^2-c^2=bc$，故 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

6．答案　A

命题意图　本题考查概率的计算.

解析　未患病者的诊断结果为阴性的概率为 $1-p$，患病者的诊断结果为阴性的概率为 q，所以对 2 名未患病者和 1 名患病者进行验血，诊断结果均为阴性的概率为 $(1-p)^2q$.

7．答案　A

命题意图　本题考查排列与组合的应用.

解析　先排数字 2，3，5，8，有 A_4^4 种排法，4 个数字形成 5 个空当．第一类：若两个 1 相邻，则从可选择的 3 个空当中选出一个放入两个 1，有 3 种排法；第二类：若两个 1 也不相邻，则从可选择的 3 个空当中选出两个分别放入数字 1，有 3 种排法．所以密码个数为 $A_4^4\times(3+3)=144$.

8．答案　D

命题意图　本题考查函数的单调性．

解析　由 $\frac{1-x}{x}>0$，得 $0<x<1$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$．设 $g(x)=\log_2\frac{1-x}{x}=\log_2\left(\frac{1}{x}-1\right)$，易得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减．当 $\frac{1-x}{x}>1$，即 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g(x)>0$，此时 $f(x)=g(x)$ 单调递减，当 $0<\frac{1-x}{x}<1$，即 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$g(x)<0$，此时 $f(x)=-g(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$．

9．答案　B

命题意图　本题考查圆柱与圆锥的结构特征．

解析　设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，则 $\triangle SMN$ 的面积为 $\frac{1}{2}SM\times SN\sin\angle MSN=\frac{1}{2}l\times l\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$，解得 $l=2\sqrt{2}$，因为圆锥 SO 的侧面积为 $\pi rl=2\sqrt{2}\pi r=4\sqrt{2}\pi$，所以 $r=2,SO=\sqrt{l^2-r^2}=2$．故该几何体的体积为 $V=V_{圆柱}+V_{圆锥}=4\pi\times3+\frac{1}{3}\times4\pi\times2=\frac{44\pi}{3}$．

10．答案　D

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质．

解析　令 $f(x)=0$，得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，又 $\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以只能是 $\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{4}\,(k\in\mathbf{Z})$，在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内，有 $-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4}$ 共 3 个零点．

11．答案　A

命题意图　本题考查双曲线的性质．

解析　设 $|PF_2|=m(m>0),|PF_1|=3m,\angle F_1PF_2=\theta$，显然 $60^\circ<\theta<180^\circ$，则 $|F_1F_2|=\sqrt{m^2+9m^2-2\times m\times3m\times\cos\theta}=\sqrt{10m^2-6m^2\cos\theta}=m\sqrt{10-6\cos\theta}$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|PF_1|-|PF_2|}=\frac{\sqrt{10-6\cos\theta}}{2}$．由于 $60^\circ<\theta<180^\circ$，所以 $\cos\theta\in\left(-1,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\frac{\sqrt{10-6\cos\theta}}{2}$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},2\right)$．

12．答案　B

命题意图　本题考查函数的零点、导数的几何意义.

解析　$f(x)$有两个不同的零点，等价于曲线 $y=a^x\ln a$ 与 $y=\mathrm{e}x$ 有两个不同的交点，当 $x>0$ 时，$a^x\ln a<0,\mathrm{e}x>0$，二者不可能有交点，只需考虑 $x<0$ 时的情况．设 $g(x)=a^x\ln a$，若 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $g(x)=-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$，易知曲线 $y=-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$ 与直线 $y=\mathrm{e}x$ 在点 $(-1,-\mathrm{e})$ 处相切；若 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，当 $x<0$ 时，$a^x>\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x,\ln a<-1$，所以 $a^x\ln a<-a^x<-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$，所以曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\mathrm{e}x$ 没有交点；若 $\frac{1}{\mathrm{e}}<a<1$，则 $\frac{1}{a}<\mathrm{e},\ln a>-1$，所以 $g(-1)=\frac{\ln a}{a}>-\frac{1}{a}>-\mathrm{e}$，曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\mathrm{e}x$ 有两个交点．综上可得，满足条件的 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．答案　$2\sqrt{3}$

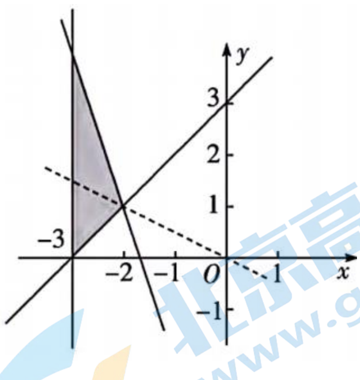
命题意图　本题考查椭圆的性质.

解析　因为 $m>3$，所以 $\frac{\sqrt{m^2-9}}{m}=\frac{1}{2}$，解得 $m=2\sqrt{3}$.

14．答案　-3

命题意图　本题考查简单的线性规划问题.

解析　不等式组表示的可行域如图中阴影部分所示，直线 $x+2y-z=0$ 过点 $(-3,0)$ 时 z 取得最小值，且 $z_{\min}=-3+0=-3$.



15．答案　3

命题意图　本题考查空间位置关系的判断以及相关计算.

解析　因为平面 α 经过棱 BB_1, DD_1 的中点，所以四边形 $MENF$ 为菱形，且易证 $A_1C \perp EF$．又因为 $A_1C \perp ME$，所以 $A_1C \perp$ 平面 $MENF$，所以 $A_1C \perp MN$，且 MN 经过 A_1C 的中点．在矩形 A_1ACC_1 中利用三角形相似可计算得 $A_1M = 3$．

16．答案　$\frac{1}{2}$

命题意图　本题考查三角恒等变换的应用．

解析　由题意知

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}+\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}=\frac{\sin(x+y)\cos(x-y)+\sin(x-y)\cos(x+y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)}$$

$=\frac{\sin 2x}{\cos(x+y)\cos(x-y)}=4\sin 2x$，由题意知 $\sin 2x \neq 0$，因此 $\cos(x+y)\cos(x-y)=\frac{1}{4}$．所以

$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]\geq\sqrt{\cos(x+y)\cos(x-y)}=\frac{1}{2}$，当且仅当

$\cos(x+y)=\cos(x-y)=\frac{1}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}, y=0$ 时等号成立．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．命题意图　本题考查独立性检验和超几何分布的相关计算．

解析　（Ⅰ）因为 $K^2=\frac{400\times(160\times 40-80\times 120)^2}{240\times 160\times 280\times 120}=\frac{200}{63}\approx 3.175$，

因为 $3.175<3.841$，所以没有 95% 的把握认为男性和女性在选购羽线服时的关注点有差异．

（Ⅱ）选出的男性人数为 $5\times\frac{160}{400}=2$，选出的女性人数为 $5\times\frac{240}{400}=3$，

由题意可得 X 的所有可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}, P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}, P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$．

18．命题意图　本题考查面面垂直的证明以及二面角的计算.

解析　（Ⅰ）因为 $EF \perp FC$，平面 $EFCD \perp$ 平面 $ABCF$，

所以 $EF \perp$ 平面 $ABCF$，

又因为 $PC \subset$ 平面 $ABCF$，所以 $EF \perp PC$.

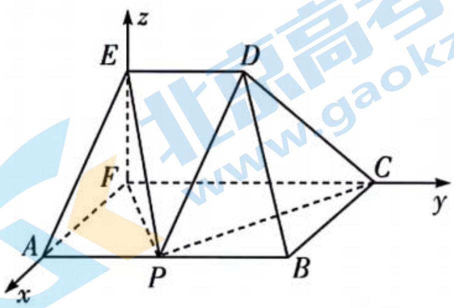
在矩形 $ABCF$ 中，$AF = 1, AB = 2, P$ 为 AB 的中点，

所以 $FP = CP = \sqrt{2}, FC = 2$，根据勾股定理可得 $FP \perp PC$.

因为 $EF \cap FP = F$，所以 $PC \perp$ 平面 EPF，

所以平面 $EPF \perp$ 平面 DPC.

（Ⅱ）以 F 为坐标原点，FA, FC, FE 所在直线分别为 x, y, z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $D(0,1,1), C(0,2,0), B(1,2,0), P(1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{DC} = (0,1,-1), \overrightarrow{DP} = (1,0,-1), \overrightarrow{DB} = (1,1,-1)$.

设平面 DPC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$，由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} y - z = 0, \\ x - z = 0, \end{cases}$

令 $y = 1$，则 $\vec{n} = (1,1,1)$.

同理可得平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{m} = (0,1,1)$.

设二面角 $B - CD - P$ 的平面角为 θ，

故 $\cos\theta = \dfrac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|} = \dfrac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即二面角 $B - CD - P$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

19．命题意图　本题考查递推关系与等比数列的性质，以及错位相减法的应用.

解析　（Ⅰ）因为 $a_n = 2a_{n-1} - 2n + 4 \ (n \geq 2)$，

所以 $a_n - 2n = 2\left[a_{n-1} - 2(n-1)\right] (n \geq 2)$.

所以 $\{a_n - 2n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列.

所以 $a_n - 2n = 2^n$，即 $a_n = 2^n + 2n$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $2^n \cdot a_n - 4^n = n \cdot 2^{n+1}$.

设前 n 项和为 T_n，

则 $T_n = 1\times 2^2 + 2\times 2^3 + 3\times 2^4 + \cdots + n\times 2^{n+1}$，

$2T_n = 1\times 2^3 + 2\times 2^4 + 3\times 2^5 + \cdots + n\times 2^{n+2}$，

两式相减可得

$-T_n = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1} - n\times 2^{n+2} = \dfrac{2^2\left(1-2^n\right)}{1-2} - n\times 2^{n+2}$

$= 2^{n+2} - 4 - n\times 2^{n+2} = (1-n)2^{n+2} - 4$，

所以 $T_n = (n-1)2^{n+2} + 4$.

20．命题意图　本题考查抛物线的性质，抛物线与直线的位置关系.

解析　（Ⅰ）由题可得 $16 = 8p$，解得 $p = 2$，

所以 $F(0,1), S_{\triangle MOF} = \dfrac{1}{2}|OF| y_M = \dfrac{1}{2}\times 1\times 4 = 2$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

由题意可知直线 AB 不与 x 轴平行，设直线 AB 的方程为 $x = my + b, A\left(\dfrac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\dfrac{y_2^2}{4}, y_2\right)$，则 $y_1y_2 \neq \pm 4$.

联立方程得 $\begin{cases} x = my + b, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 整理可得 $y^2 - 4my - 4b = 0$，

则 $\Delta = 16m^2 + 16b > 0$，且 $y_1 + y_2 = 4m$ ①，　$y_1y_2 = -4b$ ②.

$k_{MA} = \dfrac{y_1 - 4}{\dfrac{y_1^2}{4} - 4} = \dfrac{4}{y_1 + 4}$，同理可得 $k_{MB} = \dfrac{4}{y_2 + 4}$.

由题意得 $k_{MA}\times k_{MB} = \dfrac{4}{y_1 + 4}\times\dfrac{4}{y_2 + 4} = -2$，即 $4\left(y_1 + y_2\right) + y_1y_2 + 24 = 0$，

将①②代入可得 $16m - 4b + 24 = 0$，即 $b = 4m + 6$.

故直线 AB 的方程可化为 $x = my + 4m + 6$，即 $x - 6 = m\left(y + 4\right)$，

直线 AB 过定点 $D(6,-4)$.

因为 $MN \perp AB$ 于点 N，所以点 N 在以 MD 为直径的圆上，

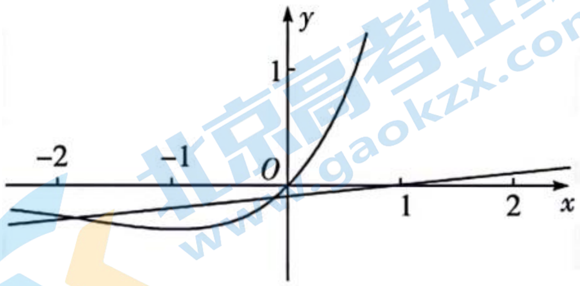
故存在 MD 的中点 Q，即 $Q(5,0)$，使得 $|NQ| = \dfrac{|MD|}{2} = \sqrt{17}$，为定值.

21．命题意图　本题考查利用导数研究函数性质.

解析　（Ⅰ）$f'(x) = (x+1)e^x$，

可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

令 $h(x) = m(x-1)$，作出 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图象如图所示，



因为存在唯一的负整数 x_0，使得 $f(x_0) < h(x_0)$，则 $x_0 = -1$，

故 $\begin{cases} f(-1) < h(-1), \\ f(-2) \geq h(-2), \end{cases}$ 即 $\dfrac{2}{3e^2} \leq m < \dfrac{1}{2e}$，

故 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{2}{3e^2}, \dfrac{1}{2e}\right)$.

（Ⅱ）根据题意，$af(x) + 3 \geq \ln\dfrac{a^2(x+1)}{8}$ 对 $x \in (-1,+\infty)$ 恒成立，

等价于 $axe^x - \ln(x+1) \geq 2\ln a - 3\ln 2 - 3$ 对 $x \in (-1,+\infty)$ 恒成立.

令 $F(x) = axe^x - \ln(x+1), x > -1$，则有 $F'(x) = a(xe^x + e^x) - \dfrac{1}{x+1}$，

令 $G(x) = F'(x) = a(xe^x + e^x) - \dfrac{1}{x+1}, x > -1$，

则 $G'(x) = a(x+2)e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$，所以 $F'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $x \to -1$ 时，$F'(x) \to -\infty, x \to +\infty$ 时，$F'(x) \to +\infty$，

从而存在唯一的 $x_0 \in (-1,+\infty)$，使得 $F'(x_0) = 0$，

即 $a\left(x_0e^{x_0}+e^{x_0}\right)-\dfrac{1}{x_0+1}=0$，

可得 $a=\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2e^{x_0}},\ln a=-2\ln\left(x_0+1\right)-x_0$，

当 $x\in\left(-1,x_0\right)$ 时，$F'\left(x\right)<0,F\left(x\right)$ 在 $\left(-1,x_0\right)$ 上单调递减，

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$F'\left(x\right)>0,F\left(x\right)$ 在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $F\left(x\right)\ge F\left(x_0\right)=ax_0e^{x_0}-\ln\left(x_0+1\right)$，

故原不等式恒成立只需 $\dfrac{x_0}{\left(x_0+1\right)^2e^{x_0}}\cdot e^{x_0}-\ln\left(x_0+1\right)\ge2\left[-2\ln\left(x_0+1\right)-x_0\right]-3\ln2-3$，

即 $\dfrac{x_0}{\left(x_0+1\right)^2}+3\ln\left(x_0+1\right)+2x_0+3\ln2+3\ge0$.

构造函数 $H\left(x\right)=\dfrac{x}{(x+1)^2}+3\ln\left(x+1\right)+2x+3\ln2+3,x>-1$，

可得 $H'\left(x\right)=\dfrac{1-x}{(x+1)^3}+\dfrac{3}{x+1}+2=\dfrac{3x^2+5x+4}{(x+1)^3}+2$，

当 $x>-1$ 时，令 $u\left(x\right)=3x^2+5x+4$，因为 $\Delta=25-48=-23<0$，从而可得 $H'\left(x\right)>0$ 在 $x\in\left(-1,+\infty\right)$ 时

恒成立，又 $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$，所以 $H\left(x\right)\ge0$ 的解集为 $\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

又因为 $\ln a=-2\ln\left(x_0+1\right)-x_0$，

令 $v\left(x\right)=-2\ln\left(x+1\right)-x$，易得 $v\left(x\right)$ 在定义域内单调递减，

所以 $\ln a\le-2\ln\left(-\dfrac{1}{2}+1\right)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\ln4$，所以 $a\le e^{\frac{1}{2}+\ln4}=4\sqrt{e}$，

故 a 的取值范围为 $\left(0,4\sqrt{e}\right]$.

22．命题意图　本题考查方程的互化、直线的参数方程的应用.

解析　（Ⅰ）由 l 的参数方程可知 $P\left(-2,0\right)$，

由题意知 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|OP||OQ|=\dfrac{1}{2}\times2|OQ|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $|OQ|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即 $Q\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，

所以 l 的斜率为 $\dfrac{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-0}{0-(-2)}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $l:\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 $x^2-y^2=1$，得到 $t^2-4\sqrt{3}t+6=0$.

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=4\sqrt{3},t_1t_2=6>0$，

故 $\dfrac{1}{|PA|}+\dfrac{1}{|PB|}=\dfrac{t_1+t_2}{t_1t_2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

23．命题意图　本题考查绝对值不等式的解法及性质.

解析　（Ⅰ）将 $a=2,b=3$ 代入 $f(x)\geq 6$，得 $|x+2|+|x-3|\geq 6$，

等价于 $\begin{cases}x\leq -2,\\ 1-2x\geq 6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2<x<3,\\ 5\geq 6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geq 3,\\ 2x-1\geq 6,\end{cases}$

得 $x\leq -\dfrac{5}{2}$ 或无解或 $x\geq \dfrac{7}{2}$.

所以不等式 $f(x)\geq 6$ 的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{7}{2},+\infty\right)$.

（Ⅱ）$f(x)=|x+a|+|x-b|\geq|(x+a)-(x-b)|=|a+b|$，

因为 $f(x)$ 的最小值为 2，且 $a>0,b>1$，所以 $a+b=2$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b-1}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b-1}\right)(a+b-1)$$

$$=\frac{b-1}{a}+\frac{a}{b-1}+2\geq 2\sqrt{\frac{b-1}{a}\cdot\frac{a}{b-1}}+2=4,$$

当且仅当 $\dfrac{b-1}{a}=\dfrac{a}{b-1}$，即 $a=b-1$，也即 $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{3}{2}$ 时取等号，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b-1}$ 的最小值为 4.