

一、单项选择题 (本大题共 8 小题, 共 32 分)

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 3\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$,

- A. $\{4, 5\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()

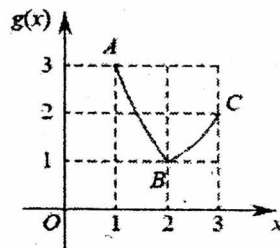
- A. $a + c > b + c$ B. $ac > bc$ C. $ac < bc$ D. $a^2 > b^2$

3. 已知命题 $p: " \exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 \leq 0 "$, 那么命题 p 的否定为 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 \geq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 > 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 \geq 0$ D. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x - 1 > 0$

4. 已知函数 $y = f(x)$ 的对应关系如下表, 函数 $y = g(x)$ 的图象是如图所示的曲线 ABC , 其中 $A(1, 3)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$, 则 $f(g(2)) = (\quad)$

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	0



- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

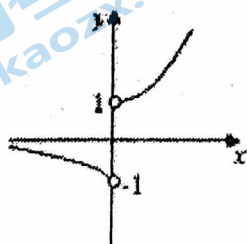
5. " $a = 2$ " 是 "函数 $f(x) = (x - a)^2$ 在 $(2, +\infty)$ 上为增函数" 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

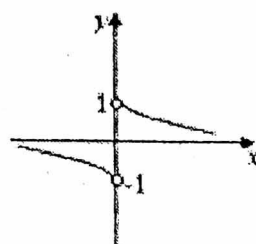
6. 函数 $y = \frac{xa^x}{|x|}$ ($0 < a < 1$) 的图象的大致形状是 ()



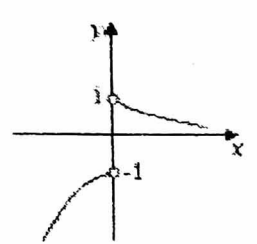
A.



B.



C.



D.

7. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, 且 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递增, 若 $f(2t-1) + f(\frac{t}{2}) < 0$, 则实数 t 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, \frac{2}{5})$ B. $[\frac{2}{5}, \infty)$ C. $(-\infty, \frac{2}{3})$

8. 已知 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = ax + 2 (a > 0)$, 对任意 $x_1 \in [-1, 2]$, 存在 $x_0 \in [-1, 2]$, 使 $g(x_1) = f(x_0)$, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 3]$ C. $[3, +\infty)$ D. $(0, 3]$

二、多项选择题 (本大题共 2 小题, 共 8 分)

9. 下列函数中, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的函数是 ()

- A. $y = x^3$ B. $y = |x|$ C. $y = (x-1)^2$ D. $y = 3^{-x}$

10. 下列指数式与对数式互化正确的是 ()

- A. $5^4 = 625$ 与 $\log_4 625 = 5$ B. $10^{-2} = 0.01$ 与 $\lg 0.01 = -2$
 C. $(\frac{1}{2})^{-4} = 16$ 与 $\log_{-4} 16 = \frac{1}{2}$ D. $9^{\frac{1}{2}} = 3$ 与 $\log_3 3 = \frac{1}{2}$

三、填空题 (本大题共 5 小题, 共 25 分)

11. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ 的定义域是_____.

12. 函数 $y = a^{x-3} + 3 (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的图象过定点_____.

13. 当 $x > -1$ 时, $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1}$ 的最小值是_____.

14. 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 1$, 则当 $x < 0$ 时, $f(x) =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & -2 \leq x \leq c, \\ \frac{1}{x}, & c < x \leq 3. \end{cases}$ 若 $c = 0$, 则 $f(x)$ 的值域是_____; 若 $f(x)$ 的值域是

$[-\frac{1}{4}, 2]$, 则实数 c 的取值范围是_____.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）
解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 计算： $64^{\frac{1}{3}} - (-\frac{5}{6})^0 - [(-2)^3]^{\frac{4}{3}} + (\frac{1}{16})^{-0.75}$

17. 已知函数 $f(x) = 3^x + a, k < 0$ ，集合 A 是函数 $f(x)$ 的值域，集合 B 是不等式 $2^{x-1} > \frac{1}{8}$ 的解集.

- (1) 当 $a=1$ 时，求集合 A 与集合 B ;
- (2) 若 $A \cap B = A$ ，求实数 a 的取值范围.

18. 已知函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ ，满足 $f(0) = 2$ ，且 $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若关于 x 的方程 $f(x) - m = 0$ 在 $x \in [0, 2]$ 上有实数解，求实数 m 的取值范围;
- (3) 设当 $x \in [t, t+2] (t \in \mathbf{R})$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 $g(t)$ ，求 $g(t)$.

19. 通过研究学生的学习行为，心理学家发现，学生的接受能力依赖于老师引入概念和描述问题所用的时间：讲授开始时，学生的兴趣激增；中间有一段不太长的时间，学生的兴趣保持较理想的状态；随后学生的注意力开始分散. 分析结果和实验表明：讲课开始 $x \text{ min}$ 时，学生注意力集中度的值 $f(x)$ ($f(x)$ 的值越大，表示学生的注意力越集中) 与 x 的关系如下：

$$f(x) = \begin{cases} -0.1x^2 + 2.6x + 43, & 0 < x \leq 10, \\ 59, & 10 < x \leq 16, \\ -3x + 107, & 16 < x \leq 30. \end{cases}$$

- (1) 讲课开始 5 min 时和讲课开始 20 min 时比较，何时学生的注意力更集中？
- (2) 讲课开始多少分钟时，学生的注意力最集中，能持续多久？
- (3) 一道数学难题，需要讲解 13 min，并且要求学生的注意力集中度至少达到 55，那么老师能否在学生达到所需状态下讲授完这道题目？请说明理由.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并用定义证明；
- (2) 用定义证明： $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减；
- (3) 若实数 a 满足 $f(a^2 + 1) < \frac{2}{5}$ ，求 a 的取值范围.

21. 已知集合 A 为非空数集， $S = \{x | x = a + b, a, b \in A\}$ ， $T = \{x | x = |a - b|, a, b \in A\}$.

- (1) 若集合 $A = \{1, 3\}$ ，直接写出集合 S, T ;
- (2) 若集合 $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ， $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，且 $T = A$ ，求证： $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$;
- (3) 若集合 $A \subseteq \{x | 0 \leq x \leq 2020, x \in \mathbf{N}\}$ ， $S \cap T = \emptyset$ ，记 $|A|$ 为集合 A 中元素的个数，求 $|A|$ 的最大值.