高 三 数 学

（试卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟）

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项正确）

1. 已知集合 $A=\{x\mid -5<x\le 1\}$，$B=\{x\mid x^2\le 9\}$，则 $A\cup B=$

（A）$[-3,1)$　　（B）$[-3,1]$　　（C）$(-5,3]$　　（D）$[-3,3]$

2. 若复数 $z=(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$，则 $|z|=$

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{5}$　　（C）$\sqrt{10}$　　（D）$2\sqrt{10}$

3. 化简 $\dfrac{\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=$

（A）$\tan\alpha$　　（B）$-\tan\alpha$　　（C）1　　（D）-1

4. 下列函数中，值域为 $(1,+\infty)$ 的是

（A）$y=\dfrac{1}{\sin x}$　　（B）$y=\sqrt{x}+1$

（C）$y=\lg(|x|+1)$　　（D）$y=2^x+1$

5. 函数 $y=\sin 2x$ 的图像向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位后经过点 $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则 φ 的最小值为

（A）$\dfrac{\pi}{12}$　　（B）$\dfrac{\pi}{6}$　　（C）$\dfrac{\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{5\pi}{6}$

6. 若 $a>1$，则 $4a+\dfrac{1}{a-1}$ 的最小值为

（A）4　　（B）6　　（C）8　　（D）无最小值

7. 已知函数 $f(x)=\dfrac{5}{x}-\log_3 x$，在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是

（A）$(2,3)$　　（B）$(3,4)$　　（C）$(4,5)$　　（D）$(5,6)$

8. 已知函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$．则“$f(0)=1$”是“$f(x)$为偶函数”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9. 已知 $a,b>0$，且 $a\neq 1$，$b\neq 1$，若 $\log_a b>1$，则

（A）$(a-1)(b-1)>0$　　（B）$(a-1)(a-b)>0$

（C）$(b-1)(a-b)>0$　　（D）$(b-1)(b-a)>0$

10. 已知 $f(x)=\begin{cases}1-|x+1|, x<0\\ x^2-2x, x\geq 0\end{cases}$，若实数 $m\in[-2,0]$，则 $|f(x)-f(-\frac{1}{2})|$ 在区间 $[m,m+1]$ 上的最大值的取值范围是

（A）$[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$　　（B）$[\frac{1}{4},\frac{3}{2}]$　　（C）$[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$　　（D）$[\frac{1}{2},2]$

二、填空题：（本大题共 5 小题，每小题 5 分　共 25 分）

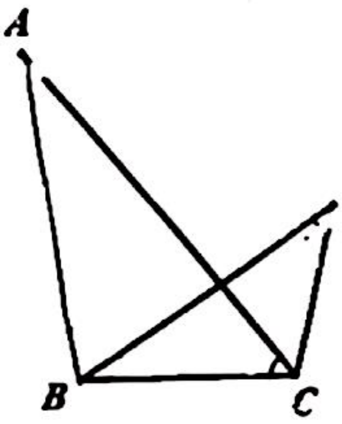
11. 已知 α 为第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$_______.

12. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 $a_1=6, S_3=2a_1$，则公差 $d=$_______，S_n 的最大值为________.

13. 设 $f(x),g(x)$ 分别是定义域为 R 的奇函数和偶函数，当 $x>0$ 时

$f'(x)g(x)-f(-x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)g(x)>0$ 的解集为_______

14. 如图，为了测量湖两侧的 A，B 两点之间的距离，某观测小组的三位同学分别在 B 点，距离 A 点 30km 处的 C 点，以及距离 C 点 10km 处的 D 点进行观测. 甲同学在 B 点测得 $\angle DBC=30^\circ$，乙同学在 C 点测得 $\angle ACB=45^\circ$，丙同学在 D 点测得 $\angle BDC=45^\circ$，则 A，B 两点间的距离为_______km.



15. 设函数 $f(x)$ 定义域为 I，对于区间 $D\subseteq I$，若存在 $x_1,x_2\in D, x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=k$，则称区间 D 为函数 $f(x)$ 的 T_k 区间. 给出下列四个结论：

①当 $a<2$ 时，$(-\infty,+\infty)$ 是 $y=3^x+a$ 的 T_4 区间；

②若 $[m,n]$ 是 $y=x^2-x$ 的 T_4 区间，则 $n-m$ 的最小值为 3；

③当 $\omega\geq 3$ 时，$[\pi,2\pi]$ 是 $y=\cos\omega x$ 的 T_2 区间；

④当 $5\pi\leq A\leq 10\pi$ 时，$[\pi,+\infty)$ 不是 $y=\dfrac{A\sin x}{x^2+1}$ 的 T_2 区间；

其中所有正确结论的序号为________.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.（本小题满分 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_2=b_3=4$，$a_6=b_5=16$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求和：$b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}$.

17.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\cos 2x-2\sin^2(x-\dfrac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求 $f(\dfrac{\pi}{2})$ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的对称轴；

（Ⅲ）若方程 $f(x)=-1$ 在区间 $[0,m]$ 上恰有一个解，求 m 的取值范围.

18.（本小题满分 14 分）

在$\triangle ABC$中，$b\sin A-a\cos\frac{B}{2}=0$.

（Ⅰ）求$\angle B$；

（Ⅱ）若$b=3\sqrt{2}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使$\triangle ABC$存在且唯一确定，并求a及$\triangle ABC$的面积.

条件①：$c=2\sqrt{2}$；

条件②：$\sin A+\sin C=2\sin B$；

条件③：$ac=21$.

19.（本小题满分 15 分）

已知函数$f(x)=e^x[x^2-(2a+1)x+1]$.

（Ⅰ）若$a=\frac{1}{2}$，求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线；

（Ⅱ）讨论$f(x)$的单调性；

（Ⅲ）当$a>0$时，若对任意实数x，$f(x)>(2-3a)e^{2a}$恒成立，求a的取值范围.

20.（本小题满分 15 分）

已知函数$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+a(x^2-1)$.

（Ⅰ）当$a=0$时，求$f(x)$的极值；

（Ⅱ）当$a=1$时，求$f(x)$在$[1,+\infty)$上的最小值；

（Ⅲ）若$f(x)$在$(1,e)$上存在零点，求a的取值范围.

21.（本小题满分 15 分）

已知集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geq 3)$，集合 $T\subseteq\{(x,y)\mid x\in S,y\in S,x\neq y\}$，且满足 $\forall a_i,a_j\in S(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$，$(a_i,a_j)\in T$ 与 $(a_j,a_i)\in T$ 恰有一个成立. 对于 T 定义

$d_T(a,b)=\begin{cases}1,(a,b)\in T\\0,(b,a)\in T\end{cases}$，以及 $l_T(a_i)=\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{n}d_T(a_i,a_j)$，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

例如 $l_T(a_2)=d_T(a_2,a_1)+d_T(a_2,a_3)+d_T(a_2,a_4)+\cdots+d_T(a_2,a_n)$.

（Ⅰ）若 $n=4,(a_1,a_2),(a_3,a_2),(a_2,a_4)\in T$，求 $l_T(a_2)$ 的值及 $l_T(a_4)$ 的最大值；

（Ⅱ）从 $l_T(a_1),\cdots,l_T(a_n)$ 中任意删去两个数，记剩下的数的和为 M，求 M 的最小值（用 n 表示）；

（Ⅲ）对于满足 $l_T(a_i)<n-1(i=1,2,\cdots,n)$ 的每一个集合 T，集合 S 中是否都存在三个不同的元素 e,f,g，使得 $d_T(e,f)+d_T(f,g)+d_T(g,e)=3$ 恒成立？请说明理由.

参考答案

一、选择题

CBDDB　CBADC

二、填空题

11. $\frac{1}{2}$　12. $-2,12$　13. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$　14. $10\sqrt{5}$　15. ①③④

三、解答题

16.（共 13 分）

解：（I）因为 $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 4, \\ a_6 = a_1 + 5d = 16, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3. \end{cases}$ 从而 $a_n = 3n-2$.

（II）因为$\begin{cases} b_3 = b_1q^2 = 4, \\ b_5 = b_1q^4 = 16, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} b_1 = 1, \\ q^2 = 4. \end{cases}$

所以 $b_{2n-1} = b_1 \cdot q^{2n-2} = (q^2)^{n-1} = 4^{n-1}$，

所以 $b_1 + b_3 + b_5 + \cdots b_{2n-1} = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n-1}{3}$.

17. 解：（1）$f(\frac{\pi}{2}) = -\frac{5}{2}$

（2）$f(x) = \sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1$　$x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{12}(k \in Z)$

（3）$m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$

18. 解：（I）由正弦定理得 $b\sin A = a\sin B$，由题设得 $a\sin B - a\cos\frac{B}{2} = 0$，

$2a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} - a\cos\frac{B}{2} = 0$，因为 $0 < \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$，所以 $a\cos\frac{B}{2} \neq 0$.

所以 $\sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}. \frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{3}$.

（II）选条件①：$c = 2\sqrt{2}$.

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $c < b$，所以 $\cos C = \frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin A = \sin(B+C) = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}$，

进而 $a=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$， $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

选条件②： $\sin A+\sin C=2\sin B$.

由正弦定理得 $a+c=2b=6\sqrt{2}$，

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, ac=18$，

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.　由 $\begin{cases}a+c=6\sqrt{2}\\ ac=18\end{cases}$，解得 $a=c=3\sqrt{2}$.

19. 解：（1） $y=-x+1$

（2） $f'(x)=e^x[x^2+(1-2a)x-2a]=e^x(x-2a)(x+1)$

① $a>-\frac{1}{2}$， $(-\infty,-1),(2a,+\infty)$ 增， $(-1,2a)$ 减

② $a<-\frac{1}{2}$， $(-\infty,2a),(-1,+\infty)$ 增， $(2a,-1)$ 减

③ $a=-\frac{1}{2}$， $(-\infty,+\infty)$ 增

（3）首先 $f(2a)$ 为 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的极小值，也是最小值。

于是 $f(2a)=e^{2a}(1-2a)>(2-3a)e^{2a}$，所以 $a>1$

当 $a>1$ 且 $x<-1$ 时，由于对称轴大于 0，

$x^2-(2a+1)x+1>(-1)^2-(2a+1)(-1)+1=2a+3>0$

因此 $f(x)>0$，此时 $(2-3a)e^{2a}<0$，符合题意。

20. 解：（I）当 $a=0$ 时， $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$，定义域：$(0,+\infty)$， $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，则 $x=\mathrm{e}$， x 变化时， $f'(x)$， $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\mathrm{e})$	e	$(\mathrm{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

则 $f(x)_{极大值}=f(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}$， $f(x)$ 没有极小值；

（II）当 $a=1$ 时， $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+(x^2-1)$，定义域：$[1,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+2x=\frac{2(1-\ln x+x^3)}{x^2}$，

令 $g(x)=1-\ln x+x^3$，定义域：$[1,+\infty)$，$g'(x)=-\frac{1}{x}+3x^2=\frac{3x^3-1}{x}>0$，

则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，则 $g(x)_{\min}=g(1)=2$，所以 $f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(x)_{\min}=f(1)=0$；

（III）$f(x)=\frac{2\ln x}{x}+a(x^2-1)$，定义域：$(1,\mathrm{e})$，

$f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}+2ax=\frac{2(1-\ln x+ax^3)}{x^2}$，

令 $g(x)=ax^3-\ln x+1$，定义域：$(1,\mathrm{e})$，$g'(x)=3ax^2-\frac{1}{x}=\frac{3ax^3-1}{x}$，

（1）当 $a<0$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上是减函数，则 $g(x)<g(1)=a+1$，

当 $a+1\le 0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上是减函数，

$f(x)_{\max}<f(1)=0$，不合题意；

当 $a+1>0$ 时，$g(\mathrm{e})=a\mathrm{e}^3<0$，

则存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使 $g(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=0$，

x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(1,x_0)$	x_0	(x_0,e)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

则 $f(x)_{极大值}=f(x_0)>f(1)=0$，

只需 $f(\mathrm{e})=\frac{2}{\mathrm{e}}+a(\mathrm{e}^2-1)<0$，即 $a<\frac{-2}{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}}$；

（2）当 $a=0$ 时，由（1）知 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上是增函数，

$f(x)>f(1)=0$，不合题意；

（3）当 $a>0$ 时，$y=\frac{2\ln x}{x}$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上是增函数，

$y=a\left(x^2-1\right)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上是增函数，

则 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上是增函数，$f(x)>f(1)=0$，不合题意，

综上所述，a 的取值范围是 $\left(-1,\frac{-2}{\mathrm{e}^3-\mathrm{e}}\right)$.

21．解：（1）1，2

（2）设 $l_T(a_1),\cdots,l_T(a_n)$ 中的最大值为 $l_T(a_k)$，由定义，$l_T(a_k)\le n-1$

若存在 $l_T(a_k)=l_T(a_m)=n-1,k\ne m$

则 $\forall i,(a_k,a_i)\in T,\forall i,(a_m,a_i)\in T$，进而 $(a_k,a_m)\in T,(a_m,a_k)\in T$，矛盾.

于是除 $l_T(a_k)$ 外，剩余的 $l_T(a_i)\le n-2$

由定义，T 中恰有 C_n^2 个元素，$l_T(a_1)+\cdots+l_T(a_n)=C_n^2$

设删去的两个数为 A,B，

则 $l_T(a_1)+\cdots+l_T(a_n)-A-B\ge C_n^2-(n-1)-(n-2)=\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{2}n+3$

构造 $T=\{(a_i,a_j)\mid a_i\in S,a_j\in S,i<j\}$，删去 $l_T(a_1),l_T(a_2)$，恰好取得等号.

（3）结论：集合 S 中存在满足条件的三个不同的元素 e，f，g，证明如下：

设 $l_T(a_i),i=1,2,\cdots,n$ 中的一个最大值为 $l_T(a_k)$，由 $l_T(a_k)<n-1$ 得 $l_T(a_k)\le n-2$

于是 $\exists u\ne k,d_T(a_k,a_u)=0$，进而 $d_T(a_u,a_k)=1$

考虑 $l_T(a_u)=d_T(a_u,a_1)\cdots+d_T(a_u,a_k)+\cdots$，

$l_T(a_k)=d_T(a_k,a_1)\cdots+d_T(a_k,a_u)+\cdots$

由于 $d_T(a_u,a_k)=1$，$d_T(a_k,a_u)=0$，而 $l_T(a_u)\le l_T(a_k)$

于是一定存在不同于 u,k 的 v，使得 $d_T(a_u,a_v)=0$，$d_T(a_k,a_v)=1$

进而 $d_T(a_v,a_u)=1$，于是 $d_T(a_u,a_k)+d_T(a_k,a_v)+d_T(a_v,a_u)=3$

取 $e=a_u,f=a_k,g=a_v$ 即可.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！