

2024 届高三 11 月质量检测试题

数学

本试卷共 4 页。全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑，如有改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 3x < 4\}$ ， $B = \{-1, 2, 5\}$ ，则 $A \cup B$ 中元素的个数为 ()

- A. 1 B. 4 C. 6 D. 7

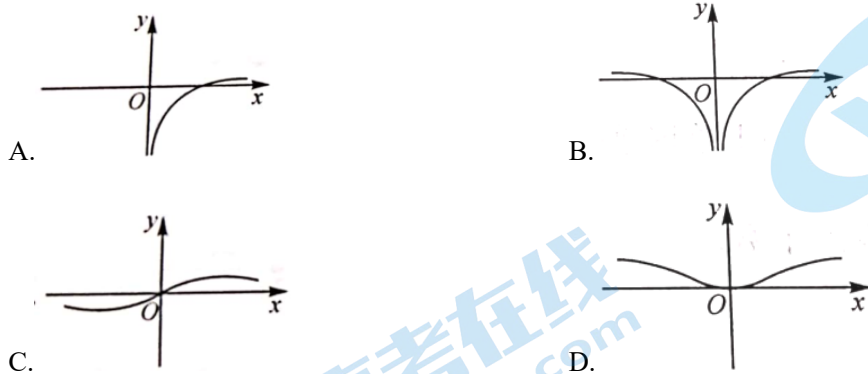
2. 已知 i 是虚数单位，则复数 $\frac{1-2i}{1-i}$ 的虚部是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

3. 设 a, b 是空间两条不同直线，则“ a 与 b 无公共点”是“ a 与 b 是异面直线”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x) = \frac{\ln|x|}{e^x + e^{-x}}$ 的图象大致为 ()

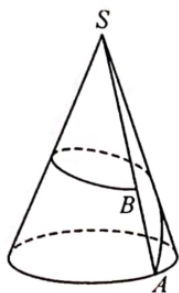


5. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 = 2$ ，且 $\vec{a} = (-1, 1)$ ，则向量 \vec{b} 在向量 \vec{a} 上的投影向量为 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $(2, 2)$ C. $(-1, 1)$ D. $(1, 1)$

6. 如图是一坐山峰的示意图，山峰大致呈圆锥形，峰底呈圆形，其半径为 1km，峰底 A 到峰顶 S 的距离为 4km， B 是山坡 SA 的中点。为了发展当地旅游业，现要建设一条从 A 到 B 的环山观光公路，当公路长度最短

时，公路距山顶的最短距离为（ ）



- A. 2km B. 3km C. $2\sqrt{5}$ km D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ km

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$ ，对任意实数 x, y 都有 $f(x)f(y) - f(x-y) = f(x+y)$ 成立，则

$$\sum_{m=1}^{2023} f(m) = (\quad)$$

- A. -2 B. -1 C. 2 D. 1

8. 已知 $\omega > 0$ ，函数 $f(x) = \sin \omega x$ 与 $g(x) = \cos \omega x$ 的图象在 $[\pi, 2\pi]$ 上最多有两个公共点，则 ω 的取值范围为（ ）

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{5}{4}, \frac{17}{8}\right]$ B. $\left(0, \frac{5}{4}\right] \cup \left(\frac{9}{4}, \frac{17}{8}\right]$
 C. $\left(0, \frac{17}{8}\right] \cup \left(\frac{9}{4}, \frac{21}{8}\right]$ D. $\left(0, \frac{17}{8}\right] \cup \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right]$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则下列命题正确的是（ ）

- A. 若 $ab \neq 0$ 且 $a < b$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. 若 $a < b$ ，则 $a^3 < b^3$
 C. 若 $a > b > 0$ ，则 $\frac{b+1}{a+1} < \frac{b}{a}$ D. 若 $a|a| < b|b|$ ，则 $a < b$

10. 某食品的保鲜时间 y （单位：小时）与储藏温度 x （单位： $^{\circ}\text{C}$ ）满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ （ $e = 2.718\cdots$ 为自然对数的底数， k, b 为常数）。若该食品在 0°C 的保鲜时间是 192 小时，在 14°C 的保鲜时间是 48 小时，则下列说法正确的是（ ）

参考数据： $2.8^5 \approx 172$ ， $2.7^6 \approx 387$

- A. $b \in (5, 6)$
 B. 若该食品储藏温度是 21°C ，则它的保鲜时间是 16 小时

C. $k < 0$

D. 若该食品保鲜时间超过 96 小时, 则它的储藏温度不高于 7°C

11. 欧拉函数 $\varphi(n)$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的函数值等于所有不超过正整数 n , 且与 n 互质的正整数的个数 (公约数只有 1 的两个正整数称为互质整数), 例如: $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, 则 ()

A. $\varphi(4) \cdot \varphi(6) = \varphi(8)$

B. 当 n 为奇数时, $\varphi(n) = n - 1$

C. 数列 $\{\varphi(2^n)\}$ 为等比数列

D. 数列 $\left\{ \frac{\varphi(2^n)}{\varphi(3^n)} \right\}$ 的前 n 项和小于 $\frac{3}{2}$

12. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, P 是正方体表面上一动点, 且 $PA = \lambda PA_1$, 记点 P 形成的轨迹为 Γ_λ , 则下列结论正确的是 ()

A. $\forall P, Q \in \Gamma_1, PQ \perp AA_1$

B. $\exists P, Q \in \Gamma_2, PQ \parallel AA_1$

C. Γ_1 的长度是 8

D. Γ_2 的长度是 $\frac{8\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = 3$, $S_4 = 10$, 则 $a_5 =$ _____.

14. 写出与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 和圆 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1$ 都相切的一条直线的方程 _____.

15. 已知关于 x 的不等式 $\log_2 x < ax + 2$ 恰有一个整数解, 则实数 a 的取值范围是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$ 则方程 $f(f(x)) = x$ 的解的个数是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

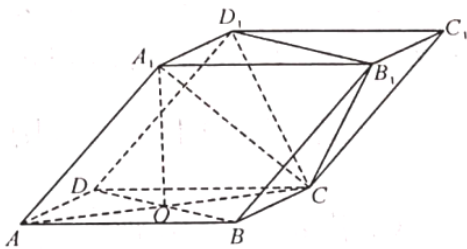
已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 和 $g(x) = \cos(2x + \varphi) + 1$ ($0 < \varphi < \pi$) 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处有相同的导数.

(1) 求 φ ;

(2) 设 x_1 是 $f(x)$ 的极大值点, x_2 是 $g(x)$ 的极小值点, 求 $f(x_1 - x_2)$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在斜四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面正方形 $ABCD$ 的中心是 O , 且 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$.



(1) 证明: 平面 $CB_1D_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$;

(2) 若该四棱柱的所有棱长均为 1, 求二面角 $A_1 - B_1C - D_1$ 的余弦值.

19. (本小题满分 12 分)

为了加快实现我国高水平科技自立自强, 某科技公司逐年加大高科技研发投入. 下图 1 是该公司 2013 年至 2022 年的年份代码 x 和年研发投入 y (单位: 亿元) 的散点图, 其中年份代码 1~10 分别对应年份 2013~2022.

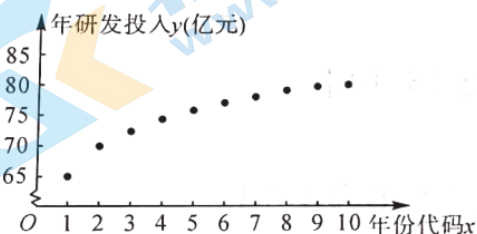


图 1

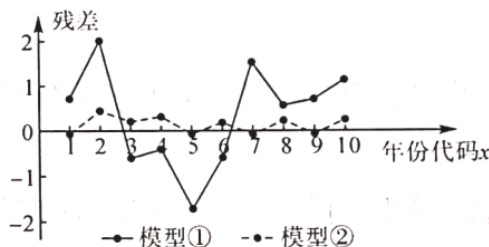


图 2

根据散点图, 分别用模型① $y = bx + a$, ② $y = c + d\sqrt{x}$ 作为年研发投入 y (单位: 亿元) 关于年份代码 x 的经验回归方程模型, 并进行残差分析, 得到图 2 所示的残差图. 结合数据, 计算得到如下表所示的一些统计量的值:

\bar{y}	\bar{t}	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (t_i - \bar{t})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$	$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})$
75	2.25	82.5	4.5	120	28.35

表中 $t_i = \sqrt{x_i}$, $\bar{t} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} t_i$.

(1) 根据残差图, 判断模型①和模型②哪一个更适宜作为年研发投入 y (单位: 亿元) 关于年份代码 x 的经验回归方程模型? 并说明理由;

(2) (i) 根据 (1) 中所选模型, 求出 y 关于 x 的经验回归方程;

(ii) 设该科技公司的年利润 L (单位: 亿元) 和年研发投入 y (单位: 亿元) 满足 $L = (111.225 - y)\sqrt{x}$

($x \in \mathbf{N}^*$ 且 $x \in [1, 20]$), 问该科技公司哪一年的年利润最大?

附: 对于一组数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 其经验回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 的斜率和截距的最小二乘

估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

20. (本小题满分 12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_n > 0$, $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+1}^2 + a_n \cdot a_{n+1} - na_n^2 = 0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_n}} + \sqrt{\frac{1}{a_{n+1}}}}$, 求 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{99}$ 的值;

(3) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = (-1)^{n+1} \cdot a_n$, 求证: $\frac{1}{2} \leq c_1 + c_2 + \dots + c_n < 1$.

21. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, CD 为 AB 边上的高, 已知 $AC + BC = AB + CD$.

(1) 若 $AB = 2CD$, 求 $\tan \frac{C}{2}$ 的值;

(2) 若 $AB = kCD$, $k > 0$, 求 $\tan C$ 的最小值及 $\tan C$ 取最小值时 k 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (kx+1)\ln x - kx$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 k 的取值范围;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.