

七校联合体 2020 届高三第二次联考试卷 (11 月)

理科数学

命题学校：广东仲元中学 命题人：周俊武 审题人：雷伟

一、选择题：本小题共 12 题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{y | y = 2^x\}$, $B = \{x | y = \ln(1-x)\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$

- A. $[0, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $[1, +\infty)$

2. 设复数 z 满足 $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$, 则 $|z|$ 的最大值为

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

3. 下列关于命题的说法错误的是 ()

A. “ $\omega=1$ ” 是 “函数 $f(x) = 3 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ 最小正周期为 2π ” 的充要条件

B. 命题 “若 $x^2 - 3x + 2 = 0$, 则 $x = 2$ ” 的逆否命题为 “若 $x \neq 2$, 则 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ”

C. 命题 “若随机变量 $X \sim N(1, 4)$, $P(X \leq 0) = m$, 则 $P(0 < X < 2) = 1 - 2m$.” 为真命题

D. 若命题 $P: \exists n_0 \in N, 2^{n_0} > 1000$, 则 $\neg P: \forall n \in N, 2^n \leq 1000$

4. 设 $x = 3^{0.2}$, $y = \log_3 2$, $z = \cos 2$, 则 ()

- A. $z < y < x$ B. $y < z < x$ C. $z < x < y$ D. $x < z < y$

5. 已知平面向量 $\vec{a} = (1, m)$, $\vec{b} = (2, 5)$, $\vec{c} = (m, 3)$, 且 $(\vec{a} + \vec{c}) // (\vec{a} - \vec{b})$, 则 $m = ()$

- A. -3 或 1 B. 2 或 -1 C. $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$ D. $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上一点 P , F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 若 ΔF_1PF_2 为直角三角形, 则满足条件的点 P 有 ()

- A. 8 个 B. 6 个 C. 4 个 D. 2 个

7. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$, 且 $a_2 = 1, a_3, a_7$ 恰好构成等比数列的前三项, 则 $a_4 = ()$

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

8. 执行如图所示的程序框图, 输出 S 的值为()

- A. $3 + \frac{1}{2} \log_2^3$ B. $\log_2 3$
 C. 4 D. 2

9. 关于圆周率 π , 数学发展史上出现过许多很有创意的求法, 如著名的浦丰实验和查理斯实验. 受其启发, 我们也可以通过设计下面的实验来估计 π 的值: 先请100名同学每人随机写下一个 x, y 都小于 1

的正实数对 (x, y) ; 再统计两数能与 1 构成钝角三角形三边的数对 (x, y) 的个数 m ; 最后根据统计数 m 估计 π 的值, 假如某次统计结果是 $m=28$, 那么本次实验可以估计 π 的值为()

- A. $\frac{22}{7}$ B. $\frac{47}{15}$ C. $\frac{78}{25}$ D. $\frac{53}{17}$

10. 设 F 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点, 过坐标原点的直线依次与双曲

线 C 的左、右支交于点 P, Q , 若 $|PQ| = 2|QF|$, $\angle PQF = 60^\circ$, 则该双曲线的离心率为()

- A. $\sqrt{3}$ B. $1 + \sqrt{3}$ C. $2 + \sqrt{3}$ D. $4 + 2\sqrt{3}$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P, Q 分别为 AD_1, B_1C 上的动点, 且满足 $AP=B_1Q$, 则下列 4 个命题中, 所有正确命题的序号是: ()

- ①存在 P, Q 的某一位置, 使 $AB // PQ$ ② $\triangle BPQ$ 的面积为定值
 ③当 $PA > 0$ 时, 直线 PB_1 与直线 AQ 一定异面 ④无论 P, Q 运动到何位置, 均有 $BC \perp PQ$

- A. ①②④ B. ①③ C. ②④ D. ①③④

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(-x) = f(x)$ 且 $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时,

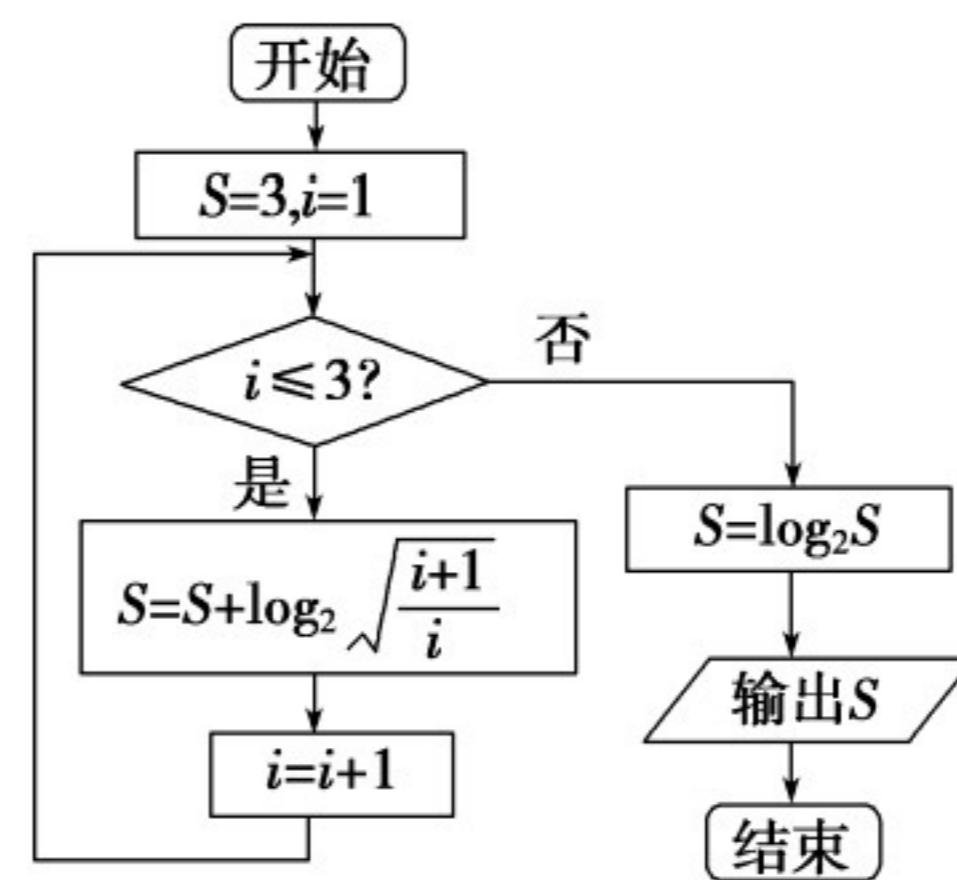
$f(x) = x^3$, 则函数 $g(x) = |\cos(\pi x)| - f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ 上的所有零点的和为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题: 本小题共 4 题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 表示前 n 项和, $a_3 = 2S_2 + 1, a_4 = 2S_3 + 1$, 则公比 q 为_____.

14. 在四面体 $P-ABC$ 中, $PA = BC = 3; PB = AC = 2; PC = AB = \sqrt{3}$, 则该四面体外



接球的体积为_____.

15. 国产杀毒软件进行比赛，每个软件进行四轮考核，每轮考核中能够准确对病毒进行查杀的进入下一轮考核，否则被淘汰. 已知某个软件在四轮考核中能够准确杀毒的概率依次是 $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ ，且各轮考核能否通过互不影响. 则该软件至多进入第三轮考核的概率为_____.

16. 设函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{5})$ ($\omega > 0$)，已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点，则 ω 的取值范围是_____.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c . 已知角 A, B, C 成等差数列， C 为钝角，且满足 $a^2 + 2bc \sin C - b^2 - c^2 = 0$

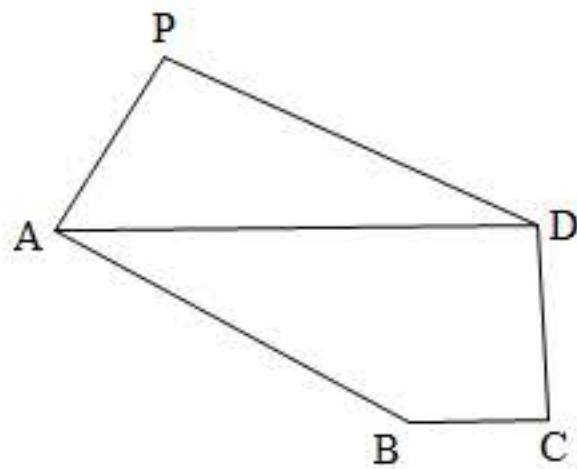
- (1) 求角 A, B, C 的大小；
- (2) 若 $a = 2$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的值.

18. (本小题满分 12 分)

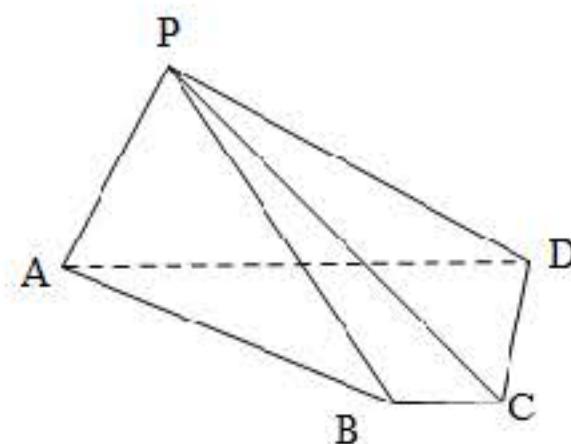
如图 1， $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的直角三角形， $PA = 1$. $BC \parallel AD$ ， $CD \perp AD$ ，

$AD = 2DC = 2$ ， $BC = \frac{1}{2}$ ，将 $\triangle PAD$ 沿着 AD 折起，如图 2，使得 $PC = 2$.

- (1) 证明：面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；
- (2) 求二面角 $A-PB-C$ 大小的余弦值.



图一



图二

19. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中，已知曲线 C 上的动点 P 到点 $F(\frac{1}{4}, 0)$ 的距离与到直线 $l: x = -\frac{1}{4}$ 的距离相等；

- (1) 求曲线 C 的轨迹方程；
- (2) 过点 $M(1, 1)$ 分别作射线 MA, MB 交曲线 C 于不同的两点 A, B ，且 $MA \perp MB$. 试探究直线 AB 是否过定点？如果是，请求出该定点；如果不是，请说明理由。

20. (本小题满分 12 分) 2019 年 3 月 5 日, 国务院总理李克强作的政府工作报告中, 提到要“惩戒学术不端, 力戒学术不端, 力戒浮躁之风”. 教育部 2014 年印发的《学术论文抽检办法》通知中规定: 每篇抽检的学术论文送 3 位同行专家进行评议, 3 位专家中有 2 位以上(含 2 位) 专家评议意见为“不合格”的学术论文, 将认定为“存在问题学术论文”. 有且只有 1 位专家评议意见为“不合格”的学术论文, 将再送另外 2 位同行专家(不同于前 3 位专家) 进行复评, 2 位复评专家中有 1 位以上(含 1 位) 专家评议意见为“不合格”的学术论文, 将认定为“存在问题学术论文”. 设每篇学术论文被每位专家评议为“不合格”的概率均为 p ($0 < p < 1$), 且各篇学术论文是否被评议为“不合格”相互独立.

(1) 若 $p = \frac{1}{2}$, 求抽检一篇学术论文, 被认定为“存在问题学术论文”的概率.

(2) 现拟定每篇抽检论文不需要复评的评审费用为 900 元, 需要复评的总评审费用 1500 元; 若某次评审抽检论文总数为 3000 篇, 求该次评审费用期望的最大值及对应 P 的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x \ln x}{x - 1} - a$ ($a < 0$).

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间并判断单调性;

(II) 若 $h(x) = (x^2 - x) \cdot f(x)$, 且方程 $h(x) = m$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 .

求证: $x_1 + x_2 > 1$.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xoy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点

为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系.

(1) 写出 C_1 的普通方程和极坐标方程;

(2) 设 A, B 是 C_1 上的两点, 且 $OA \perp OB$, 求 $\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = m - |2x - 1|$, $m \in \mathbf{R}$, 且 $f(x + \frac{1}{2}) \geq 0$ 的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$.

(1) 求 m 的值;

(2) 若 a, b, c 都为正数, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = \frac{m}{2}$, 证明: $a + 2b + 3c \geq 9$.

七校联合体 2020 届高三第二次联考试卷 (11 月)

理科数学参考答案及评分标准

一. 选择题

1. 选 B; 集合 $A = (0, +\infty)$ 集合 $B = (-\infty, 1)$ 故 $A \cap B = (0, 1)$

2. 选 C; 复数 z 对应复平面上的点是以 $(1, 1)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆, 故 $|z|$ 的最大值即为圆的直径 $2\sqrt{2}$

3. 选 A; “ $\omega=1$ ”是“函数 $f(x)=3 \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ 最小正周期为 2π ”的充分不必要条件 .

4. 选 A; $\because 3^{0.2} > 1 \quad 0 < \log_3 2 < 1 \quad \cos 2 < 0$

5. 选 D; 因为 $\vec{a} + \vec{c} = (m+1, 3+m)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-1, m-5)$ 而 $(\vec{a} + \vec{c}) // (\vec{a} - \vec{b})$

$$\therefore (m+1)(m-5) = -3-m, \therefore m^2 - 3m - 2 = 0 \text{ 解得 } m = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

6. 选 B;

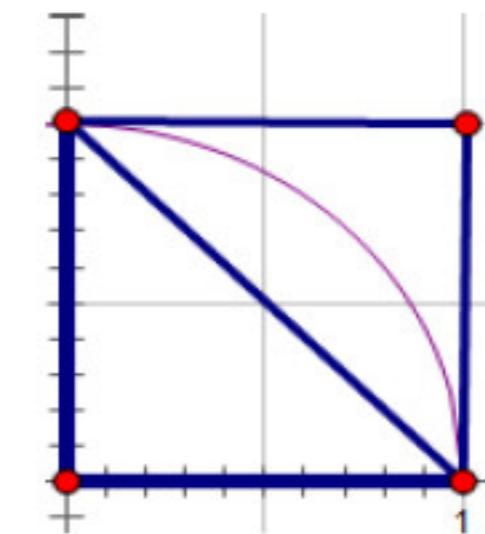
7. 选 C; $\because a_{n+1}^2 = 2S_n + n + 4$ 当 $n \geq 2$, $a_n^2 = 2S_{n-1} + (n-1) + 4$ 两式相减化简得

$a_{n+1}^2 = (a_n + 1)^2, \because a_n > 0 \therefore a_{n+1} = a_n + 1$ 数列 $\{a_n\}$ 是公差 1 的等差数列

又 $a_2 - 1, a_3, a_7$ 恰好构成等比数列的前三项, $\therefore (a_1 + 2)^2 = a_1(a_1 + 6), \therefore a_1 = 2 \therefore a_4 = 5$

8. 选 D;

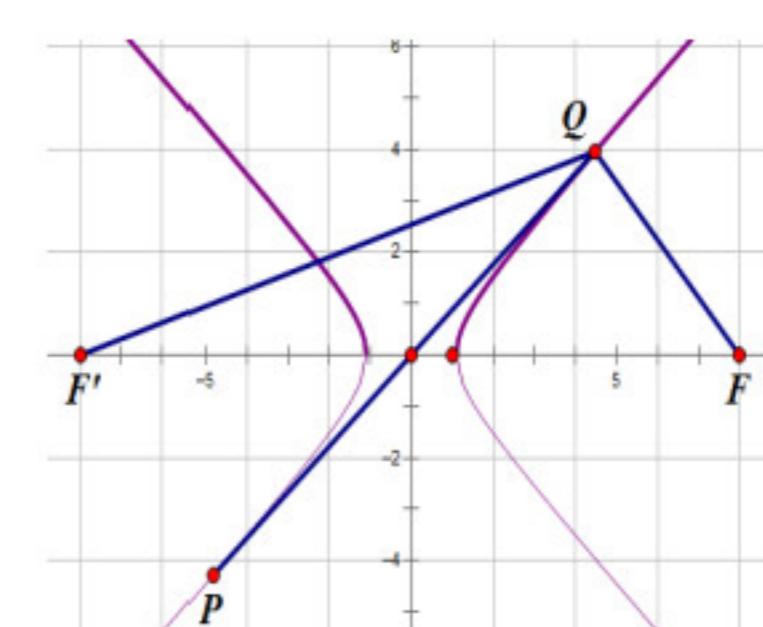
9. 选 C; $\because \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$ 而满足构成钝角三角形则需 $\begin{cases} x+y > 1 \\ x^2 + y^2 - 1 < 0 \end{cases}$ 如图



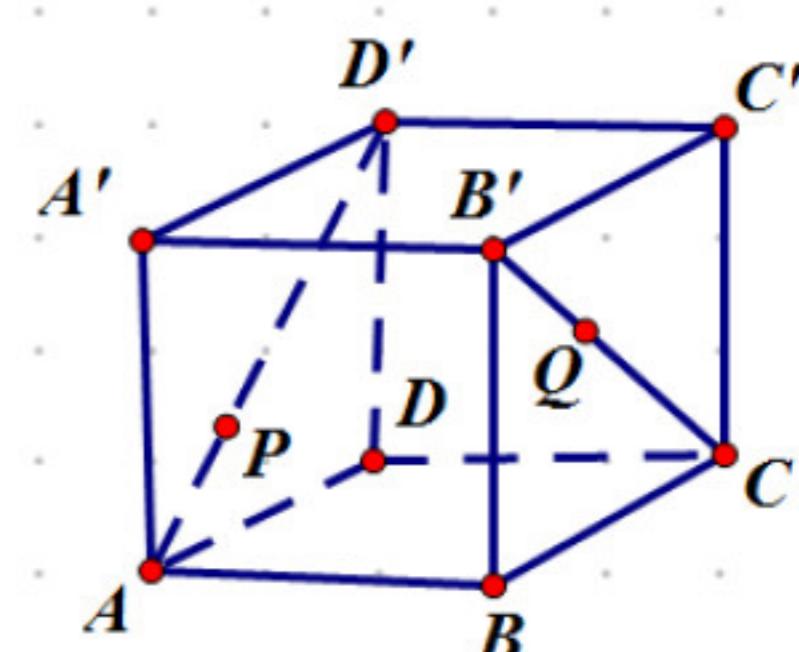
弓形面积 $\therefore \frac{28}{100} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \therefore \pi = \frac{78}{25}$

10. 选 B; 如图三角形 OQF 为正三角形, $|QF|=c$ $|QF'|=2a+c$

$Rt\Delta FQF', \angle QFF' = \frac{\pi}{3}, \therefore \frac{2a+c}{c} = \sqrt{3}$ 解得 $e = \sqrt{3} + 1$



11. 选 D; ①当 P,Q 分别为棱 AD₁,B₁C 的中点时满足, 正确. ②取



特殊位置 ΔBPQ 的面积为变化故错误;同理③④正确

12. 选 C; 由于函数 $f(x)$ 与函数 $y=|\cos(\pi x)|$ 都为偶函数, 故在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上零点和为 0, 只

需求在 $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ 零点和, 而两函数都关于直线 $x=1$ 对称, 且 $x=1$ 为零点, 另外两零点和为 2,

故所有零点和为 3

二. 填空题

13. 答案: $q=3$ 由 $a_3=2S_2+1, a_4=2S_3+1$ 得 $a_4-a_3=2(S_3-S_2)=2a_3, \therefore a_4=3a_3 \therefore q=\frac{a_4}{a_3}=3$ 。

14. 答案: $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$; 由于三棱锥相对的棱长对应相等, 构造长方体模型, 相对的棱长即为长方体

面对角线长,

15. 答案 $\frac{5}{8}$; 设事件 $A_i(i=1, 2, 3, 4)$ 表示“该软件能通过第 i 轮考核”, 由已知得 $P(A_1)=\frac{5}{6}$,

$P(A_2)=\frac{3}{5}, P(A_3)=\frac{3}{4}, P(A_4)=\frac{1}{3}$, 设事件 C 表示“该软件至多进入第三轮”, 则 $P(C)=P(\overline{A}_1$

$$+\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}+\frac{5}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

16. 答案 $[\frac{12}{5}, \frac{29}{10})$; 分析: 由于 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 则令 $\omega x+\frac{\pi}{5}=5\pi$ 解得

$$x=\frac{24\pi}{5\omega}\leq 2\pi \text{ 得 } \omega\geq\frac{12}{5}, \text{ 再令 } \omega x+\frac{\pi}{5}=6\pi \text{ 解得, } x=\frac{29\pi}{5\omega}>2\pi \text{ 得 } \omega<\frac{29}{10}$$

三. 解答题

17. 解: (1) 因为 A, B, C 成等差数列, $\therefore 2B=A+C$, 又 $A+B+C=\pi$, $\therefore 3B=\pi, B=\frac{\pi}{3}$

..... 2 分; 由 $a^2+2bc\sin C-b^2-c^2=0$ 和余弦定理可得: $\sin C=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$

$$=\sin(\frac{\pi}{2}+A); \text{ 3 分; } \because C \text{ 为钝角, 而 } \frac{\pi}{2}+A \text{ 也是钝角, } \therefore C=\frac{\pi}{2}+A \text{ ①, 4 分}$$

又 $A+C=\frac{2\pi}{3}$ ②, 联立①②解得 $A=\frac{\pi}{12}, C=\frac{7\pi}{12}$, 5 分 $\therefore A=\frac{\pi}{12}, B=\frac{\pi}{3}, C=\frac{7\pi}{12}$ 为

所求. 6 分

(2) 由 $a=2$ 和正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 可得:

$$c=\frac{2\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=4+2\sqrt{3}. \text{ 8 分}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 2 \times (4 + 2\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3} \dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积 S 的值是 $3+2\sqrt{3}$ 12分

18. 解：（1）法一：证明： $\because DC = 1, PC = 2, PD = \sqrt{AD^2 - PA^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore PD^2 + CD^2 = PC^2$, 即: $CD \perp PD$, 2 分; 又 $CD \perp AD$, $PD \cap AD = D$, \therefore

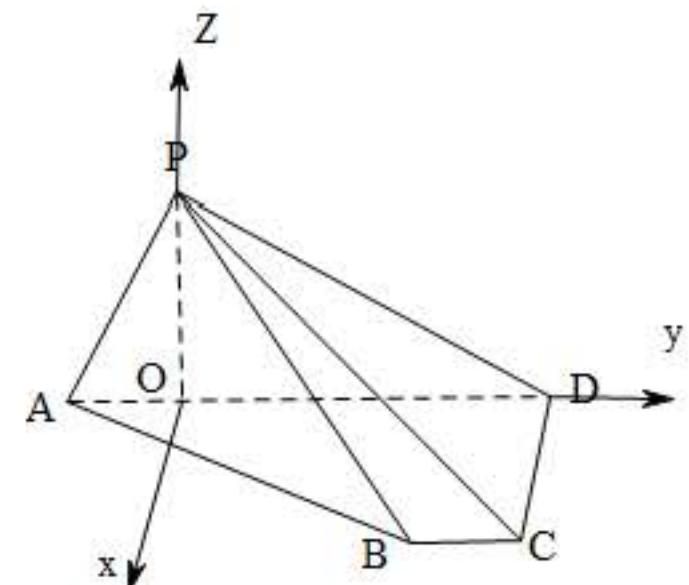
$CD \perp \text{面}PAD$,3分; $CD \subset \text{面}ABCD \therefore \text{面}PAD \perp \text{面}ABCD$ 4分

法二：过 P 作 $PO \perp AD$ ①，垂足为 O ，连结 OC ……1 分. 因为 $PA = 1$ ， $\therefore AO = \frac{1}{2}$ ， $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$OC^2 = OD^2 + CD^2 = \frac{13}{4}, \quad OC^2 + PO^2 = \frac{13}{4} + \frac{3}{4} = PC^2, \quad \therefore PO \perp OC, \quad ②$$

又 $AD \cap OC = O$ ③, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,3 分; $PO \subset$ 面 PAD , 所以面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$; 得证。.....4 分

(2) 如图以 O 为坐标原点, 垂直 OD 方向为 x 轴, OD 为 y 轴, OP 为 z 轴建立空间直角坐标系. $A(0, -\frac{1}{2}, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, \frac{3}{2}, 0)$, $P(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. ……5 分; 设面 BPC 的法向量为



$\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \end{cases}$ 得: $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}z_1$, $y_1 = 0$, 取 $\vec{m} = (\sqrt{3}, 0, 2)$;7分

设面 PAB 的法向量为 $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 由 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \end{cases}$,

得 $x_2 + \frac{3}{2}y_2 = 0, -x_2 - y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0$, 取 $\vec{n} = (3, -2, \frac{2}{\sqrt{3}})$ 9 分

$$\therefore \cos <\vec{m}, \vec{n}> = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{13\sqrt{301}}{301}, \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

由图形可知二面角 $A-PB-C$ 为钝角,11分;

所以二面角 $A-PB-C$ 大小的余弦值为 $-\frac{13\sqrt{301}}{301}$ 12 分

19. 解 (1) 设, 依题意: $|PF|=|x|+\frac{1}{4}$, 即: $\sqrt{(x-\frac{1}{4})^2+y^2}=|x|+\frac{1}{4}$,2分

化简得: $y^2=x$, ∴ 曲线 C 的轨迹方程为 $y^2=x$ 4分

(2) 直线 AB 经过定点 $(2, -1)$ 5分

证明: 如图依题意, 直线 AB 斜率不能为 0, 所以设直线 AB 的方程为: $x=ny+t$ 6分

联立 $y^2=x$ 得: $y^2-my-t=0$, $\Delta=m^2+4t>0$ ①, 设 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则 $y_1+y_2=m$,

$y_1y_2=-t$,7分; 又 $MA \perp MB$, ∴ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}=0$, 即

$$(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-1)(y_2-1)=0, \text{ 即}$$

$$x_1x_2-(x_1+x_2)+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=0, \text{8分}$$

$$\text{又 } y_1^2=x_1, \quad y_2^2=x_2,$$

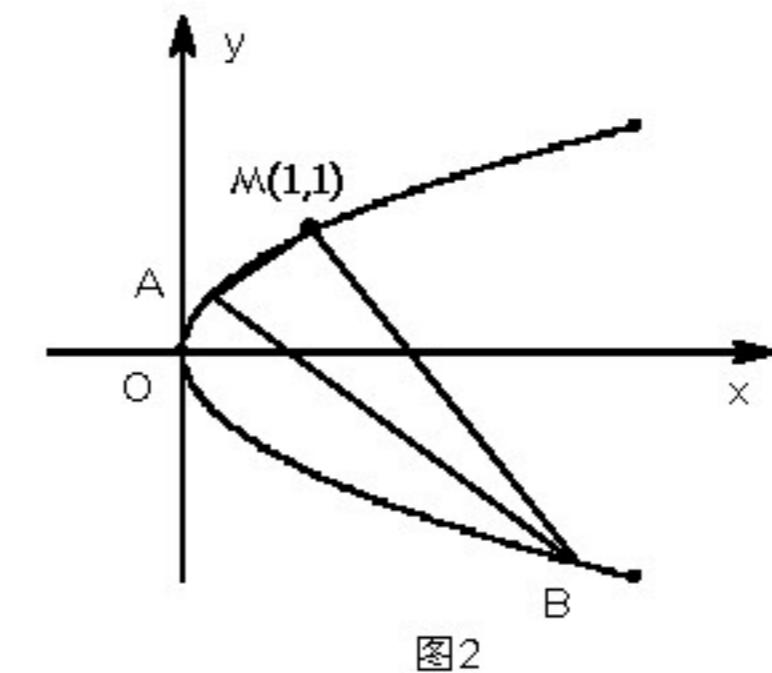


图2

$$\therefore (y_1y_2)^2-(y_1+y_2)^2+3y_1y_2-(y_1+y_2)+2=0,$$

$$\therefore t^2-3t-m^2-m+2=t^2-3t-(m^2+m-2)=(t+m-1)(t-m-2)=0, \text{10分}$$

依题意, 直线 AB 不经过 M , ∴ $m+t \neq 1$, 所以: $t=m+2$. 此时代入①式恒成立

而当 $t=m+2$ 时, 直线 AB 方程为: $x=ny+m+2$, 即 $(x-2)-n(y+1)=0$, 即直线 AB 过定点 $(2, -1)$. 综上, 直线 AB 过定点 $(2, -1)$1 2分

20. 【解析】(1) 因为一篇学术论文初评被认定为“存在问题学术论文”的概率

$$\text{为 } C_3^2 p^2 (1-p) + C_3^3 p^3, \text{1分}$$

一篇学术论文复评被认定为“存在问题学术论文”的概率

$$\text{为 } C_3^1 p (1-p)^2 [1 - (1-p)^2], \text{3分}$$

所以一篇学术论文被认定为“存在问题学术论文”的概率为

$$f(p) = C_3^2 p^2 (1-p) + C_3^3 p^3 + C_3^1 p (1-p)^2 [1 - (1-p)^2] \text{4分}$$

$$= 3p^2(1-p) + p^3 + 3p(1-p)^2[1 - (1-p)^2]$$

$$= -3p^5 + 12p^4 - 17p^3 + 9p^2. \therefore p = \frac{1}{2} \text{ 时}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{32}$$

所以抽检一篇的学术论文被认定为“存在问题学术论文”的概率为 $\frac{25}{32}$ 5分

(2) 设每篇学术论文的评审费为 X 元, 则 X 的可能取值为 900, 1500.6分

$$P(X=1500) = C_3^1 p (1-p)^2, \text{7分}$$

$$P(X=900) = 1 - C_3^1 p (1-p)^2, \text{8分}$$

$$\text{所以 } E(X) = 900 \times [1 - C_3^1 p (1-p)^2] + 1500 \times C_3^1 p (1-p)^2$$

$$= 900 + 1800p(1-p)^2. \text{9分}$$

$$\text{令 } g(p) = p(1-p)^2, p \in (0,1), g'(p) = (1-p)^2 - 2p(1-p) = (3p-1)(p-1).$$

当 $p \in (0, \frac{1}{3})$ 时, $g'(p) > 0$, $g(p)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递增;

当 $p \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $g'(p) < 0$, $g(p)$ 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减,

所以 $g(p)$ 的最大值为 $g(\frac{1}{3}) = \frac{4}{27}$ 11 分

所以评审最高费用为 $3000 \times (900 + 1800 \times \frac{4}{27}) \times 10^{-4} = 350$ (万元). 对应 $p = \frac{1}{3}$ 12 分

21. 解答: (I) 依题意定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ 1 分

$$f'(x) = \frac{x-1-1\ln x}{(x-1)^2} 2 \text{ 分}$$

设 $g(x) = x - 1 - \ln x$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

\therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0 \therefore g(x) > g(1) = 0, \therefore f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增. 3 分

\therefore 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0 \therefore g(x) > g(1) = 0, \therefore f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

综上可得: 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 1), (1, +\infty)$ 5 分

(II) $h(x) = x^2 \ln x - ax^2 + ax (a < 0)$, $\therefore h'(x) = 2x \ln x + x - 2ax + a$, 6 分

设 $m(x) = h'(x)$ $\therefore m'(x) = 2 \ln x - 2a + 3 \therefore m'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $m'(x) < 0, m'(1) = 3 - 2a > 0$,

\therefore 必存在 $\alpha \in (0, 1)$, 使得 $m'(\alpha) = 0$, 即 $2 \ln \alpha - 2a + 3 = 0$,

$\therefore h'(x)$ 在 $(0, \alpha)$ 上单调递减, 在 $(\alpha, +\infty)$ 上单调递增, 7 分

又 $h'(\alpha) = a - 2\alpha < 0, h'(1) = 1 - a > 0$, 设 $h'(x_0) = 0$, 则 $x_0 \in (0, 1)$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 8 分

又 $h(1) = 0$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $0 < x_1 < x_0, x_0 < x_2 < 1$,

$$\text{由 (I) 知 } \begin{cases} f(x_1) < f(x_0) \\ f(x_2) > f(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h(x_1) > f(x_0)(x_1^2 - x_1) \\ h(x_2) < f(x_0)(x_2^2 - x_2) \end{cases}, 10 \text{ 分}$$

$$\therefore f(x_0)(x_2^2 - x_2) > h(x_2) = h(x_1) > f(x_0)(x_1^2 - x_1), 11 \text{ 分}$$

$$\therefore (x_2^2 - x_2) - (x_1^2 - x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1) > 0, \therefore x_1 + x_2 > 1. 12 \text{ 分}$$

22. 解: (1) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)

$$\text{移项后两边平方可得: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

即曲线 C_1 的普通方程是: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 2 分

因为 $x = \rho \cos \alpha, y = \rho \sin \alpha$, 3 分

代入上式可得 C_1 的极坐标方程为：

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \alpha}{4} + \frac{\rho^2 \sin^2 \alpha}{3} = 1. \quad \text{即: } \frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{4} + \frac{\sin^2 \alpha}{3} \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) 因为 A, B 是 C_1 上的两点, 且 $OA \perp OB$, 所以不妨设 $A(\rho_1, \theta), B(\rho_2, \frac{\pi}{2} + \theta)$. ……6 分

由 $A(\rho_1, \theta)$ 在曲线 C_1 上可知: $\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{\cos^2 \theta}{4} + \frac{\sin^2 \theta}{3}$ 7 分

同理 $B(\rho_2, \frac{\pi}{2} + \theta)$ 在曲线 C_1 上可知: $\frac{1}{\rho_2^2} = \frac{\cos^2(\theta + \frac{\pi}{2})}{4} + \frac{\sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})}{3} = \frac{\sin^2 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{3}$.
8 分 所以:

$$\frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{{\rho_1}^2} + \frac{1}{{\rho_2}^2} = \frac{\cos^2 \theta}{4} + \frac{\sin^2 \theta}{3} + \frac{\sin^2 \theta}{4} + \frac{\cos^2 \theta}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \dots\dots 10 \text{分}$$

23. 解：(1) $f(x) = m - |2x-1|$, $m \in R$, 且 $f(x + \frac{1}{2}) \geq 0$ 的解集为 $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, 即:

$m - |2x| \geq 0$ 的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$, …… 2 分; 又因为 $m - |2x| \geq 0$ 解集为

$$\left\{ x \mid -\frac{m}{2} \leq x \leq \frac{m}{2} \right\}, \dots \dots 2 \text{分}; \text{ 所以 } \frac{m}{2} = 1, \text{ 即: } m = 2 \dots \dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为 a, b, c 都为正数, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} = 1$, 所以

当且仅当 $a = 2b = 3c = 3$ 时，等号成立。……… 9 分

即 $a+2b+3c \geq 9$ 得证 10 分