昌平区 2023－2024 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷　　　　2024.1

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将答题卡交回．

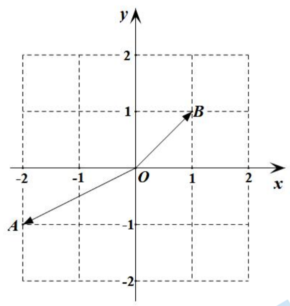
第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2-1>0\}$，则 $\complement_U A=$

（A）$(-1,\ 1)$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$(-\infty,-1]$　　（D）$[1,\ +\infty)$

（2）在复平面内，复数 z_1 和 z_2 对应的点分别为 A,B，则 $z_1\cdot z_2=$



（A）$-1-3\mathrm{i}$

（B）$-3-\mathrm{i}$

（C）$1-3\mathrm{i}$

（D）$3+\mathrm{i}$

（3）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，则其渐近线方程为

（A）$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　（B）$y=\pm\sqrt{2}x$　　（C）$y=\pm\dfrac{1}{2}x$　　（D）$y=\pm 2x$

（4）已知 $(1-3x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_2+a_4=$

（A）-32　　（B）32　　（C）495　　（D）585

（5）下列函数中，在区间 $(0,\ 2)$ 上为减函数的是

（A）$y=2^x$　　（B）$y=\sin x$　　（C）$y=\dfrac{x}{1-x}$　　（D）$y=\log_{0.5}(-x^2+4x)$

（6）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则“$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)<f(x)$”是“$f(x)$ 为减函数”的

（A）充分必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分而不必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）已知点 P 在圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上，点 A 的坐标为 $(-1,\sqrt{3})$，O 为原点，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的取值范围是

（A）$[-3,3]$　　（B）$[3,5]$　　（C）$[1,9]$　　（D）$[3,7]$

（8）“三斜求积术”是我国宋代的数学家秦九韶用实例的形式提出的，其实质是根据三角形的三边长 a,b,c 求三角形面积 S，即 $S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}$．现有面积为 $3\sqrt{15}$ 的 $\triangle ABC$ 满足 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，则 $\triangle ABC$ 的周长是

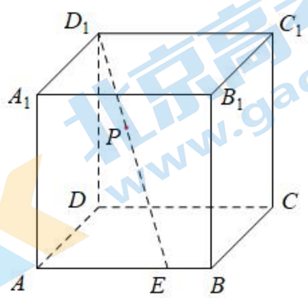
（A）9　　（B）12　　（C）18　　（D）36

（9）已知函数 $f(x)=2^{\sin x}-2^{\cos x}$，则

（A）$f(\frac{\pi}{4}+x)=f(\frac{\pi}{4}-x)$　　（B）$f(x)$ 不是周期函数

（C）$f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上存在极值　　（D）$f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 内有且只有一个零点

（10）如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 AB 上的点，且 $\frac{AE}{EB}=3$，点 P 在线段 D_1E 上，则点 P 到直线 AD 距离的最小值为



（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（C）$\frac{3}{5}$

（D）1

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知 $\sin x=-\frac{3}{5}, x\in(\pi,\frac{3}{2}\pi)$，则 $\tan x=$______.

（12）若抛物线 $x^2=4y$ 上的点 M 到焦点 F 的距离为 8，则 M 到 x 轴的距离是______.

（13）已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_n=2a_n-a_1$，且a_1，a_2+1，a_3成等差数列，

则$a_1=$_____；$a_n=$_____.

（14）若函数$f(x)=\begin{cases}2^x-m,x\leqslant 1,\\ \ln x,x>1\end{cases}$在定义域上不是单调函数，则实数$m$的一个取值可以为_____.

（15）已知数列$\{a_n\}$，$a_1=a\ (0<a<1)$，$a_{n+1}=a^{a_n}$．给出下列四个结论：

① $a_2\in(a,1)$；

② $a_{10}>a_9$；

③ $\{a_{2n}\}$为递增数列；

④ $\forall n\in\mathbf{N}^*$，使得$|a_{n+1}-a_n|<1-a$.

其中所有正确结论的序号是_____.

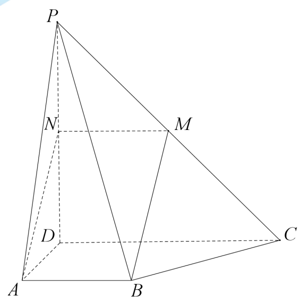
三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题13分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PD\perp$平面$ABCD$，底面$ABCD$是直角梯形，$AD\perp DC$，$AB\,/\!/\,DC$，$AB=AD=2$，$DC=PD=4$，点N是PD的中点，直线PC交平面ABN于点M.

（Ⅰ）求证：点M是PC的中点；

（Ⅱ）求二面角$A-MN-P$的大小.



(17)（本小题 14 分）

在 ΔABC 中，$b\cos C + c\cos B = 2a\cos A$.

（Ⅰ）求角 A 的大小；

（Ⅱ）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，使得 ΔABC 存在且唯一确定，求 ΔABC 的面积.

条件①：$a=7$；

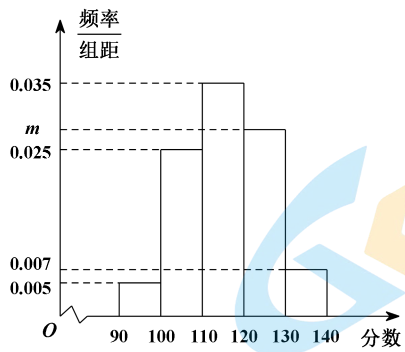
条件②：$c=8$；

条件③：$\cos C=\dfrac{1}{7}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（Ⅱ）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(18)（本小题 13 分）

某汽车生产企业对一款新上市的新能源汽车进行了市场调研，统计该款车车主对所购汽车性能的评分，将数据分成 5 组：$[90,100),[100,110),[110,120),[120,130),[130,140]$，并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）求 m 的值；

（Ⅱ）该汽车生产企业在购买这款车的车主中任选 3 人，对评分低于 110 分的车主送价值 3000 元的售后服务项目，对评分不低于 110 分的车主送价值 2000 元的售后服务项目. 若为这 3 人提供的售后服务项目总价值为 X 元，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）用随机抽样的方法从购买这款车的车主中抽取 10 人，设这 10 人中评分不低于 110 分的人数为 Y，问 $k(k=0，1，2，…，10)$ 为何值时，$P(Y=k)$ 的值最大？（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $M(2,0)$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设过点 $T(t,0)$ 的直线 l 与椭圆 E 有两个不同的交点 A,B（均不与点 M 重合），若以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，求 t 的值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{2-x}-x+1$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）判断 $f(x)$ 极值点的个数，并说明理由.

（21）（本小题 15 分）

已知 $Q:a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为有穷正整数数列，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$，集合 $X=\{-1,0,1\}$.
若存在 $x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,k$，使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=t$，则称 t 为 $k-$可表数，称集合 $T=\{t\mid t=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k,x_i\in X,i=1,2,\cdots,k\}$ 为 $k-$可表集.

（Ⅰ）若 $k=10$，$a_i=2^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,k$，判定 $31,1024$ 是否为 $k-$可表数，并说明理由；

（Ⅱ）若 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$，证明：$n\leqslant\frac{3^k-1}{2}$；

（Ⅲ）设 $a_i=3^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,k$，若 $\{1,2,\cdots,2024\}\subseteq T$，求 k 的最小值.

昌平区 2023－2024 学年第一学期高三年级期末质量抽测

数学试卷参考答案　　　　2024.1

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	B	A	B	C	D	B	D	C	D	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

（11）$\frac{3}{4}$　　（12）7　　（13）2　2^n

（14）1（答案不唯一）　　（15）①②④

注：第（13）题第一空 3 分,第二空 2 分;第（15）题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（16）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $AB // DC$， $AB \not\subset$ 平面PCD， $CD \subset$ 平面PCD，

所以 $AB //$ 平面 PCD.　……………1 分

因为直线 PC 交平面 ABN 于点 M .

所以平面 $ABMN \cap$ 平面 $PCD = MN$.　……………2 分

所以 $AB // MN$.　……………3 分

所以 $CD // MN$.　……………4 分

因为点 N 是 PD 的中点，

所以点 M 是 PC 的中点.　……………5 分

（Ⅱ）因为 $PD \perp$ 平面$ABCD$，

所以 $PD \perp DA$， $PD \perp DC$.

因为 $AD \perp DC$，

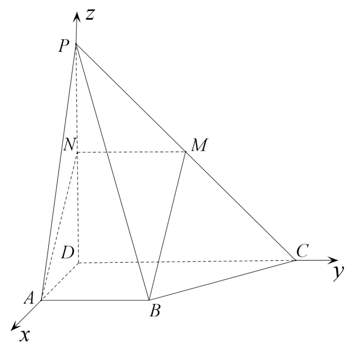
所以 DP, DA, DC 两两相互垂直. ……6 分

如图，以点 D 为坐标原点，

建立空间直角坐标系 $D-xyz$. 则 $D(0,0,0)$，

$A(2,0,0)$， $B(2,2,0)$， $C(0,4,0)$， $P(0,0,4)$，

……7 分



所以 $N(0,0,2)$， $M(0,2,2)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$， $\overrightarrow{AN}=(-2,0,2)$. …………… 8 分

设平面 $ABMN$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$， 则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y=0,\\ -2x+2z=0.\end{cases}$ …………… 9 分

令 $x=1$， 于是 $z=1$， $y=0$， 所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$. …………… 10 分

又因为平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$. …………… 11 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………… 12 分

由题知，二面角 $A-MN-P$ 是钝角，

所以二面角 $A-MN-P$ 的大小为 $\frac{3\pi}{4}$. …………… 13 分

（17）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$， ……………1 分

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\cos A$. …………… 2 分

所以 $\sin(B+C)=2\sin A\cos A$. …………… 3 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=2\sin A\cos A$. …………… 4 分

又 $\sin A\neq 0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$. …………… 5 分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$. …………… 6 分

（Ⅱ）选择条件①③：

因为 $\cos C=\frac{1}{7}$， $0<C<\pi$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. …………… 8 分

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{7\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=8$. …………… 10 分

因为 $\sin B=\sin[\pi-(C+\dfrac{\pi}{3})]=\sin(C+\dfrac{\pi}{3})=\sin C\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos C\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, …………… 12 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 7\times 8\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=10\sqrt{3}$. …………… 14 分

选条件②③：

因为 $\cos C=\dfrac{1}{7}$， $0<C<\pi$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. ……… 8 分

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{4\sqrt{3}}{7}}=7$. ………10 分

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

所以 $b^2-2b-15=0$. ……………12 分

解得 $b=5$ 或 $b=-3$（舍）.

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 7\times 5\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$. …………… 14 分

（18）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）依题意，$(0.005+0.025+0.035+m+0.007)\times 10=1$，所以 $m=0.028$. . . . . . 3 分

（Ⅱ）由题意可知，X 的可能取值为 $\{6000,7000,8000,9000\}$.

任选 1 人，估计认为该款车性能的评分不低于 110 分的概率为 0.7. ……… 4 分

$P(X=6000)=C_3^3\times 0.7^3\times 0.3^0=0.343$； ……… 5 分

$P(X=7000)=C_3^2\times 0.7^2\times 0.3=0.441$； ……… 6 分

$P(X=8000)=C_3^1\times 0.7\times 0.3^2=0.189$； ……… 7 分

$P(X=9000)=C_3^0\times0.7^0\times0.3^3=0.027$. ………8 分

所以 X 的分布列为

X	6000	7000	8000	9000
P	0.343	0.441	0.189	0.027

所以 $E(X)=6000\times0.343+7000\times0.441+8000\times0.189+9000\times0.027=6900$ 元.

……………10 分

（III） k=7 时， $P(Y=k)$ 的值最大. …………… 13 分

（19）（本小题 15 分）

解：（I）由题设， $a=2$， $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………… 1 分

因为 $a^2=b^2+c^2$， …………… 2 分

所以 $c=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$. ……………4 分

所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …………… 5 分

（II）（1）当 $l\perp x$ 轴时，设直线 l 的方程为 $x=t(-2<t<2)$，代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

整理得 $y=\pm\sqrt{2-\frac{t^2}{2}}$. …………… 6 分

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{2-\frac{t^2}{2}}=2-t$.

解得 $t=\frac{2}{3}$ 或 $t=2$（舍）. ……………7 分

（2）当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-t)$（$k\neq0$）. …… 8 分

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-t)\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k^2tx+(2k^2t^2-4)=0$. …………… 9 分

所以 $x_1+x_2=\frac{4k^2t}{1+2k^2}$， $x_1x_2=\frac{2k^2t^2-4}{1+2k^2}$， $\Delta=8(4k^2-k^2t^2+2)>0$. …… 11 分

因为以线段 AB 为直径的圆恒过点 M，所以 $MA \perp MB$.

所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. …………… 12 分

又因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-2,y_1)\cdot(x_2-2,y_2)$

$=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$

$=(x_1-2)(x_2-2)+k(x_1-t)\times k(x_2-t)$

$=(k^2+1)x_1x_2-(k^2t+2)(x_1+x_2)+k^2t^2+4$

$=(k^2+1)\times\dfrac{2k^2t^2-4}{1+2k^2}-(k^2t+2)\times\dfrac{4k^2t}{1+2k^2}+k^2t^2+4$

所以 $(k^2+1)(2k^2t^2-4)-4k^2t(k^2t+2)+(k^2t^2+4)(1+2k^2)=0$，

得 $3k^2t^2-8k^2t+4k^2=0$，即 $(3t^2-8t+4)k^2=0$. …………… 13 分

所以 $3t^2-8t+4=0$. 解得 $t=2$（舍）或 $t=\dfrac{2}{3}$. …………… 14 分

经检验，当 $t=\dfrac{2}{3}$ 时 $\Delta>0$ 满足题意.

综上，$t=\dfrac{2}{3}$. …………… 15 分

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $f'(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1$， …………… 2 分

所以直线的斜率 $k=f'(2)=-1$，$f(2)=3$. …………… 3 分

所以切线方程为 $y=-x+5$. …………… 4 分

（Ⅱ）$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=f'(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1$，

所以 $g'(x)=(x^2-4x+2)e^{2-x}$. …………… 6 分

令 $g'(x)=0$，即 $x^2-4x+2=0$，解得 $x=2-\sqrt{2}$ 或 $x=2+\sqrt{2}$. …………… 7 分

当 x 变化时，$g'(x),g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2},+\infty)$
$g'(x)$	+	0	–	0	+
$g(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $g(x)$ 单调递增区间是 $(-\infty,2-\sqrt{2})$，$(2+\sqrt{2},+\infty)$； ……………8 分

单调递减区间是 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$. …………… 9 分

（III）（1）当 $x<2-\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,2-\sqrt{2})$ 上单调递增.

$g(2-\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-2)e^{\sqrt{2}}-1>\frac{1}{2}e-1>0$，$g(0)=-1<0$， ……………10 分

所以存在唯一 $x_1\in(0,2-\sqrt{2})$，使 $g(x_1)=0$. ……………11 分

【当 $x<2-\sqrt{2}$ 时，函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,2-\sqrt{2})$ 上单调递增.

$g(2-\sqrt{2})>g(1)=e-1>0$，$g(-1)=-3e^3-1<0$， ……………10 分

所以存在唯一 $x_1\in(-1,2-\sqrt{2})$，使 $g(x_1)=0$.】 ……………11 分

（2）当 $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$ 时，$g(x)$ 在区间 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 上单调递减.

$g(2-\sqrt{2})>0$，$g(2+\sqrt{2})<g(2)=-1<0$， ……………12 分

所以存在唯一 $x_2\in(2-\sqrt{2},2)$，使 $g(x_2)=0$. ……………13 分

（3）当 $x>2+\sqrt{2}$ 时，$(-x^2+2x)<0, e^{2-x}>0$, 故 $g(x)=(-x^2+2x)e^{2-x}-1<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(2+\sqrt{2},+\infty)$ 上无零点. …………… 14 分

综上，当 x 变化时，$f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 有两个极值点. …………… 15 分

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $-1\times 2^0+0\times(2^1+2^2+2^3+2^4+2^6+2^7+2^8+2^9)+1\times 2^5=31$，

所以 31 为 $k-$可表数. …………… 2 分

又 $x_1\times 2^0+x_2\times 2^1+\cdots+x_{10}\times 2^9\leqslant 1\times 2^0+1\times 2^1+\cdots+1\times 2^9=2^{10}-1=1023<1024$，

所以 1024 不是 $k-$可表数. …………… 4 分

（Ⅱ）由题设，$0=0\times a_1+0\times a_2+\cdots+0\times a_k$，所以 $0\in T$． …………… 5 分

若 $s\in T$，则存在 $x_i\in X$，$i=1,2,\cdots,k$，使得 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k=s$，

所以 $-(x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ka_k)=-s$，且 $-x_i\in X$．

所以 $-s\in T$． …………… 6 分

因为 $\{1,2,\cdots,n\}\subseteq T$，所以 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}\subseteq T$．

所以集合 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$ 中元素的个数不超过集合 T 的元素个数. …… 7 分

又因为集体 T 中元素个数至多为 3^k， ………… 8 分

所以 $2n+1\leqslant 3^k$，即 $n\leqslant\dfrac{3^k-1}{2}$. ……………9 分

（Ⅲ）由题设，对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$．

又 $x_1\times 1+x_2\times 3+x_3\times 3^2+\cdots+x_{m-1}\times 3^{m-2}\leqslant 1\times 1+1\times 3+1\times 3^2+\cdots+1\times 3^{m-2}=\dfrac{3^{m-1}-1}{2}$，

所以 $k>m-1$．所以 $k\geqslant m$．

而 $1\times 1+1\times 3+1\times 3^2+\cdots+1\times 3^{m-1}=\dfrac{3^m-1}{2}$，

即当 $n=\dfrac{3^m-1}{2}$ 时，取 $a_1=1,a_2=3,\cdots,a_m=3^{m-1}$，$n$ 为 $m-$可表数. ……10 分

因为 $2(1+3+3^2+\cdots+3^{m-1})=2\times\dfrac{3^m-1}{2}=3^m-1$，

由三进制基本事实可知，对任意的 $0\leqslant p\leqslant 3^m-1$，存在 $r_i\in\{0,1,2\},i=1,2,\cdots,m$，

使 $p=r_1\times 3^0+r_2\times 3^1+\cdots+r_m\times 3^{m-1}$．

所以 $p-\dfrac{3^m-1}{2}=(r_1\times 3^0+r_2\times 3^1+\cdots+r_m\times 3^{m-1})-(3^0+3^1+\cdots+3^{m-1})$

$=(r_1-1)\times 3^0+(r_2-1)\times 3^1+\cdots+(r_m-1)\times 3^{m-1}$. ...... 11 分

令 $x_i=r_i-1$，则有 $x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,m$.

设 $t=p-\dfrac{3^m-1}{2}$，则 $-\dfrac{3^m-1}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$，

由 p 任意性，对任意的 $-\dfrac{3^m-1}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$，$t\in\mathbf{Z}$，都有

$t=x_1\times 3^0+x_2\times 3^1+\cdots+x_m\times 3^{m-1},x_i\in\{-1,0,1\},i=1,2,\cdots,m$ . ... 12 分

又因为 $n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$，所以对于任意的 $-n\leqslant t\leqslant n$，$t\in\mathbf{Z}$，t 为 $m-$可表数.

综上，可知 k 的最小值为 m，其中 m 满足 $\dfrac{3^{m-1}-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^m-1}{2}$. ...... 13 分

又因为当 $n=2024$ 时，$\dfrac{3^7-1}{2}<n\leqslant\dfrac{3^8-1}{2}$.

所以 k 的最小值为 8 . ... 15 分