北京市东城区2017—2018学年度第二学期高三综合练习(二)

数学(文科)

2018.5

本试卷共4页,共150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1)已知全集$U=\mathbf{R}$,集合$A=\{x|x+1<0\}$,$B=\{x|x-4\leqslant 0\}$,则$\complement_U(A\cap B)=$

(A)$\{x|x\leqslant -1$ 或 $x>4\}$ (B)$\{x|x\geqslant -1$ 或 $x<4\}$

(C)$\{x|x\geqslant -1\}$ (D)$\{x|x>4\}$

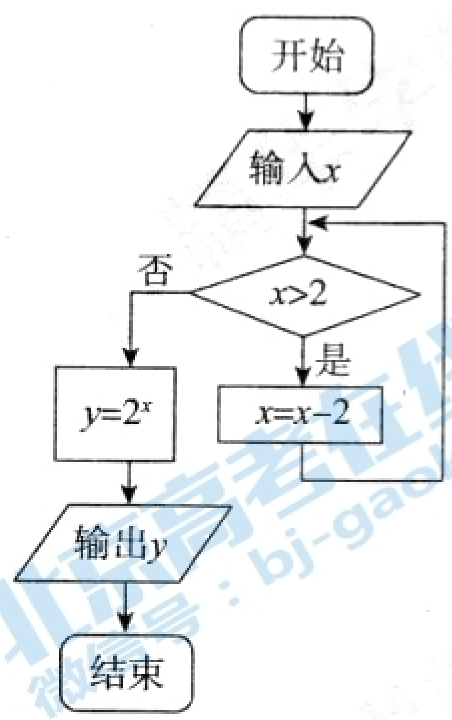
(2)某校高一年级有400名学生,高二年级有360名学生,现用分层抽样的方法在这760名学生中抽取一个样本.已知在高一年级中抽取了60名学生,则在高二年级中应抽取的学生人数为

(A)66 (B)54 (C)40 (D)36

(3)执行如图所示的程序框图,若输入的x值为9,则输出的y值为

(A)0 (B)1

(C)2 (D)4



(4)若$x^2<\log_2(x+1)$,则x的取值范围是

(A)$(0,1)$ (B)$(1,+\infty)$

(C)$(-1,0)$ (D)$(0,+\infty)$

(5)已知圆$x^2+y^2-4x+a=0$截直线$x-\sqrt{3}y=0$所得弦的长度为$2\sqrt{3}$,则实数a的值为

(A)-2 (B)0

(C)2 (D)6

(6)设$a,b,c\in\mathbf{R}$,则“$a+b>c$”是“$a>c$ 且 $b>c$”的

(A)充分而不必要条件 (B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件 (D)既不充分也不必要条件

(7)已知m是平面α的一条斜线,直线l过平面α内一点A,那么下列选项中能成立的是

(A)$l\subset\alpha$,且$l\perp m$ (B)$l\perp\alpha$,且$l\perp m$

(C)$l\perp\alpha$,且$l/\!/m$ (D)$l\subset\alpha$,且$l/\!/m$

(8)已知函数$f(x)=x\sin x$,现给出如下命题:

① 当$x\in(-4,-3)$时,$f(x)\geqslant 0$;

② $f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增;

③ $f(x)$在区间$(1,3)$上有极大值;

④ 存在$M>0$,使得对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$|f(x)|\leqslant M$.

其中真命题的序号是

(A)①② (B)②③ (C)②④ (D)③④

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9)若复数 $(a+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ 为纯虚数，则实数 $a=$________.

(10)若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $2x-y=0$，则双曲线的离心率为________.

(11)若 x,y 满足 $\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ y\geqslant 3,\\ x+y\leqslant 8,\end{cases}$ 则 $3x+2y$ 的最小值为________.

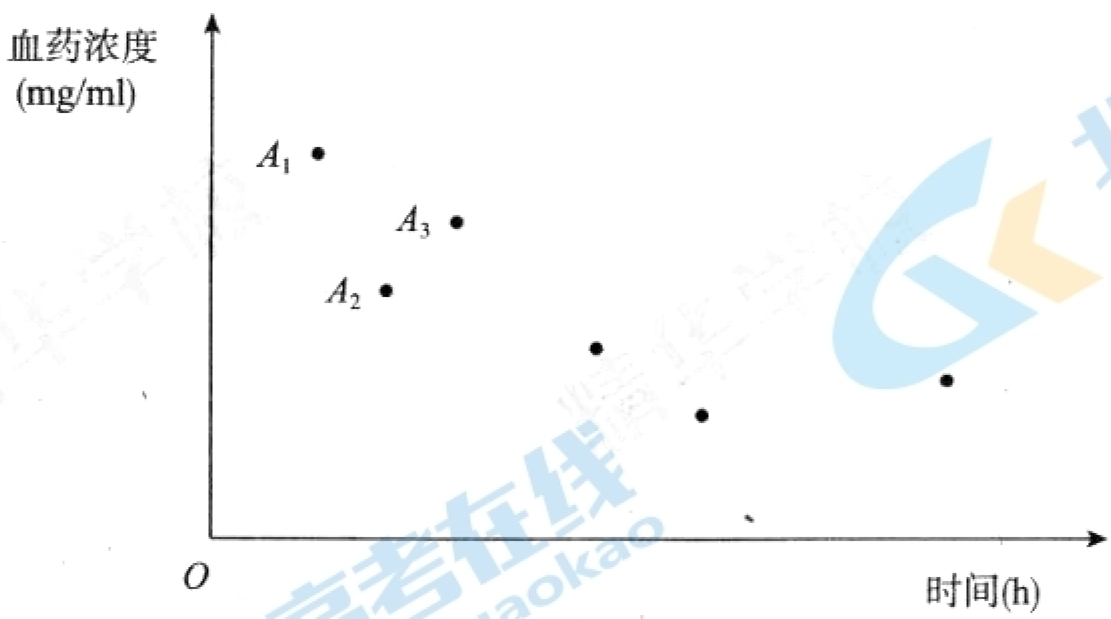
(12)已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=-\frac{1}{2}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为________.

(13)在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\frac{1}{4}$，$a=2b$，则 $\frac{c}{b}=$________；$\sin B=$________.

(14)血药浓度（Serum Drug Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度（单位：mg/ml），通常用血药浓度来研究药物的作用强度．下图为服用同等剂量的三种新药后血药浓度的变化情况，其中点 A_i 的横坐标表示服用第 i 种药后血药浓度达到峰值时所用的时间，其它点的横坐标分别表示服用三种新药后血药浓度第二次达到峰值的一半时所用的时间（单位：h），点 A_i 的纵坐标表示第 i 种药的血药浓度的峰值．（$i=1,2,3$）

①记 V_i 为服用第 i 种药后达到血药浓度峰值时，血药浓度提高的平均速度，则 V_1,V_2,V_3 中最大的是________；

②记 T_i 为服用第 i 种药后血药浓度从峰值降到峰值的一半所用的时间，则 T_1,T_2,T_3 中最大的是________.



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15)(本小题 13 分)

已知$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列，数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1,b_2=\frac{1}{2}$，且$(a_n+1)b_{n+1}=nb_n$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)求$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

(16)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})+2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

(Ⅰ)求曲线 $y=f(x)$的对称轴方程；

(Ⅱ)当 $x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$时，$f(x)\geqslant m$ 恒成立，求实数 m 的最大值.

(17)(本小题 13 分)

2017 年北京市百项疏堵工程基本完成.有关部门为了解疏堵工程完成前后早高峰时段公交车运行情况，调取某路公交车早高峰时段全程所用时间(单位：分钟)的数据，从疏堵工程完成前的数据中随机抽取 5 个数据，记为 A 组，从疏堵工程完成后的数据中随机抽取 5 个数据，记为 B 组.

A 组：128，100，151，125，120.

B 组：100，102，96，101，a.

已知 B 组数据的中位数为 100，且从中随机抽取一个数不小于 100 的概率是$\frac{4}{5}$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)该路公交车全程所用时间不超过 100 分钟，称为“正点运行”.从 A，B 两组数据中各随机抽取一个数据，求这两个数据对应的两次运行中至少有一次“正点运行”的概率；

(Ⅲ)试比较 A，B 两组数据方差的大小(不要求计算)，并说明其实际意义.

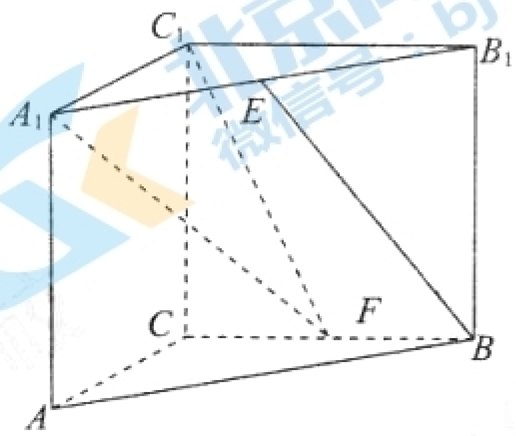
(18)(本小题 14 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱垂直于底面,$AC\perp BC$,$AC=BC=CC_1$,E,F 分别为 A_1B_1,BC 的中点.

(Ⅰ)求证:$AC\perp C_1F$;

(Ⅱ)求证:$BE//$平面 A_1C_1F;

(Ⅲ)在棱 CC_1 上是否存在一点 G,使得平面 $B_1EG\perp$平面 A_1C_1F? 说明理由.



(19)(本小题 13 分)

设函数 $f(x)=2\ln x-x^2+ax+2$.

(Ⅰ)当 $a=3$ 时,求 $f(x)$的单调区间和极值;

(Ⅱ)若直线 $y=-x+1$ 是曲线 $y=f(x)$的切线,求 a 的值.

(20)(本小题 14 分)

已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 $F(1,0)$,离心率为$\frac{1}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;

(Ⅱ)A,B 是椭圆 C 在 y 轴右侧部分上的两个动点,若原点 O 到直线 AB 的距离为$\sqrt{3}$,证明:$\triangle ABF$ 的周长为定值.

(Ⅱ)因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi$.

所以当 $x=\frac{3\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 0.

所以实数 m 的最大值为 0. ………………………………………… 13 分

(17)(共 13 分)

解：(Ⅰ)因为 B 组数据的中位数为 100，

所以 $a\leqslant100$.

因为从 B 组中随机抽取一个数不小于 100 的概率是 $\frac{4}{5}$，

所以 $a\geqslant100$.

所以 $a=100$. ………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)从 A 组中取到 128，151，125，120 时，B 组中符合题意的取法为 100，96，100，共 $4\times3=12$ 种；

从 A 组中取到 100 时，B 组中符合题意的取法为 100，102，96，101，100，共 $1\times5=5$ 种；

因此符合题意的取法共有 $12+5=17$ 种，

而所有不同的取法共有 $5\times5=25$ 种，

所以该路公交车至少有一次“正点运行”的概率 $P=\frac{17}{25}$. ………………… 10 分

(Ⅲ)B 组的方差小于 A 组的方差，说明疏堵工程完成后，该路公交车全程所用时间更加稳定，而且“正点运行”率高，运行更加有保障. ……………………… 13 分

(18)(共 14 分)

(Ⅰ)证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为侧棱垂直于底面，

所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC.

所以 $CC_1\perp AC$.

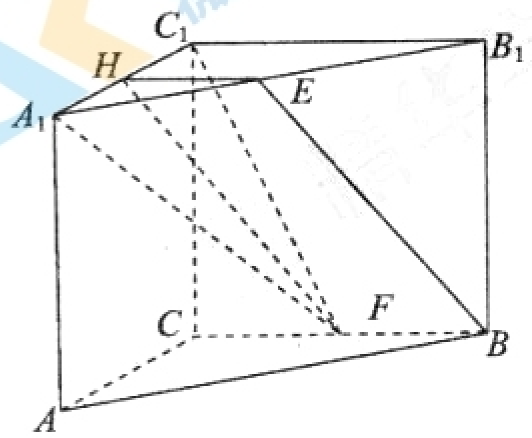
因为 $AC\perp BC$，$CC_1\cap BC=C$，

所以 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1.

因为 $C_1F\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AC\perp C_1F$ ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)证明：取 A_1C_1 中点 H，连接 EH，FH.



则 $EH\parallel B_1C_1$，且 $EH=\frac{1}{2}B_1C_1$，

又因为 $BF\parallel B_1C_1$，且 $BF=\frac{1}{2}B_1C_1$，

所以 $EH\parallel BF$，且 $EH=BF$.

所以四边形 $BEHF$ 为平行四边形.

所以 $BE\parallel FH$.

又 $BE\not\subset$ 平面 A_1C_1F，$FH\subset$ 平面 A_1C_1F，

所以 $BE\parallel$ 平面 A_1C_1F. ………………………………………… 9 分

(Ⅲ)解：在棱 CC_1 上存在点 G，且 G 为 CC_1 的中点.

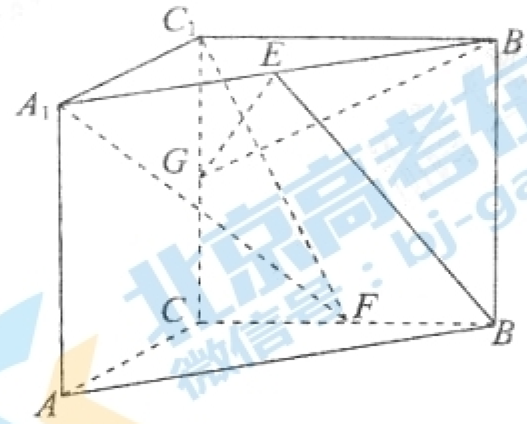
连接 EG，GB_1.

在正方形 BB_1C_1C 中，

因为 F 为 BC 中点，

所以 $\triangle B_1C_1G\cong\triangle C_1CF$.

所以 $\angle CC_1F+\angle B_1GC_1=90^\circ$.



所以 $B_1G\perp C_1F$.

由(Ⅰ)可得 $AC\perp$平面 BB_1C_1C,

因为 $AC/\!/A_1C_1$,

所以 $A_1C_1\perp$平面 BB_1C_1C.

因为 $B_1G\subset$平面 BB_1C_1C,

所以 $A_1C_1\perp B_1G$.

因为 $A_1C_1\cap C_1F=C_1$,

所以 $B_1G\perp$平面 A_1C_1F.

因为 $B_1G\subset$平面 B_1EG,

所以平面 $B_1EG\perp$平面 A_1C_1F. ………………………………………… 14 分

(19)(共 13 分)

解:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. ………………………………………… 1 分

(Ⅰ)当 $a=3$ 时,$f(x)=2\ln x-x^2+3x+2$,

所以 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x+3=\dfrac{-2x^2+3x+2}{x}$.

令 $f'(x)=\dfrac{-2x^2+3x+2}{x}=0$,得$-2x^2+3x+2=0$,

因为 $x>0$,所以 $x=2$.

$f(x)$与 $f'(x)$在区间$(0,+\infty)$上的变化情况如下:

x	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$2\ln 2+4$	↘

所以 $f(x)$的单调递增区间为$(0,2)$,单调递减区间为$(2,+\infty)$.

$f(x)$有极大值 $f(2)=2\ln 2+4$,$f(x)$无极小值. ………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $f(x)=2\ln x-x^2+ax+2$,

所以 $f'(x)=\dfrac{2}{x}-2x+a$.

设直线 $y=-x+1$ 与曲线 $y=f(x)$的切点为$(x_0,f(x_0))$,

所以 $f'(x_0)=\dfrac{2}{x_0}-2x_0+a=\dfrac{-2x_0^2+ax_0+2}{x_0}=-1$,即 $2x_0^2-(a+1)x_0-2=0$.

又因为 $f(x_0)=2\ln x_0-x_0^2+ax_0+2=-x_0+1$,即 $2\ln x_0-x_0^2+(a+1)x_0+1=0$,

所以 $2\ln x_0+x_0^2-1=0$.

设 $g(x)=2\ln x+x^2-1$,

因为 $g'(x)=\dfrac{2(1+x^2)}{x}>0(x>0)$,

所以 $g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

所以 $g(x)$在区间$(0,+\infty)$上有且只有一个零点.

因为 $g(1)=0$,即 $x_0=1$,

所以 $a=-1$. …………………………………………………………… 13 分

(20)(共 14 分)

(Ⅰ)解:由题意$\begin{cases}a^2=b^2+1,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)证明:①当 AB 垂直于 x 轴时,AB 方程为 $x=\sqrt{3}$,

$A(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$,$B(\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$,$F(1,0)$.

$|AF|=|BF|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{1}{2}(4-\sqrt{3})$.

因为$|AB|=\sqrt{3}$,

所以$|AF|+|BF|+|AB|=4$. ………………………………………………………… 5 分

②当 AB 不垂直于 x 轴时,设 AB 的方程为 $y=kx+m$.

因为原点 O 到直线 AB 的距离为$\sqrt{3}$,

所以$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$,即 $m^2=3(1+k^2)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

即$(3+4k^2)x^2+8kmx+12k^2=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{12k^2}{3+4k^2}$.

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{-8km}{3+4k^2})^2-4\times\frac{12k^2}{3+4k^2}}$$

$$=\frac{|m|}{\sqrt{3}}\times\sqrt{\frac{64k^2m^2-48k^2(3+4k^2)}{(3+4k^2)^2}}$$

$$=\frac{4|m||k|}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{3+4k^2}$$

$=\frac{4|m||k|}{3+4k^2}$. ………………………………………………………… 10 分

因为 A,B 在 y 轴右侧,所以 $mk<0$,所以$|AB|=-\frac{4mk}{3+4k^2}$.

$$|AF|^2=(x_1-1)^2+y_1^2$$

$$=(x_1-1)^2+3(1-\frac{x_1^2}{4})$$

$$=\frac{1}{4}x_1^2-2x_1+4$$

$$=(\frac{1}{2}x_1-2)^2.$$

所以$|AF|=2-\frac{1}{2}x_1$,同理$|BF|=2-\frac{1}{2}x_2$.

所以$|AF|+|BF|=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)=4-\frac{1}{2}(\frac{-8km}{3+4k^2})=4+\frac{4km}{3+4k^2}$.

所以$|AF|+|BF|+|AB|=4+\frac{4km}{3+4k^2}-\frac{4km}{3+4k^2}=4$.

综上,$\triangle ABF$ 的周长等于椭圆 C 的长轴长 4. ……………………………… 14 分