绝密★启用前

“天一大联考·皖豫名校联盟”2023届高中毕业班第三次考试

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{y|y\geqslant 1\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,y=\sqrt{\frac{2-x}{x}}\right\}$，则 $M\cap N=$

A. $[1,2]$　　B. $[2,+\infty)$　　C. $[1,2)$　　D. $[1,+\infty)$

2. 已知复数 z,z_0 满足 $|z-z_0|=\sqrt{2}$，$|z_0|=\sqrt{2}$，则 $|z|$ 的最大值为

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $3\sqrt{2}$

3. 将向量 $\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt{3})$ 绕坐标原点 O 顺时针旋转30°得到 $\overrightarrow{OP_1}$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP_1}=$

A. 0　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

4. 某社区举行“喜迎五一”书画作品比赛，参加比赛的老年人占 $\frac{3}{5}$，中年人占 $\frac{1}{5}$，小朋友占 $\frac{1}{5}$，经评审，评出一、二、三等奖作品若干，其中老年人、中年人、小朋友的作品获奖的概率分别为0.6，0.2，0.1.现从所有作品中任取一件，则取到获奖作品的概率为

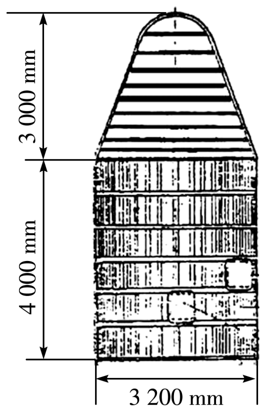
A. 0.21　　B. 0.4　　C. 0.42　　D. 0.58

5. 在室温下，某型号硅二极管的伏安特性曲线可用公式 $I=10^{-13}(e^{\frac{U}{0.026}}-1)$ 来表示，其中 I 是导通电流，规定 $|I|<10^{-7}$ 时视为二极管关断，否则视为二极管开通，U 是加在二极管两端的电压.若在室温下，分别在该型号二级管两端加0.78 V正向电压（即 $U=0.78$）和0.78 V反向电压（即 $U=-0.78$），则此时二极管的状态分别为

A. 开通、开通　　B. 关断、关断

C. 开通、关断　　D. 关断、开通

6. 如图为一个火箭的整流罩的简单模型的轴截面，整流罩是空心的，无下底面，由两个部分组成，上部分近似为圆锥，下部分为圆柱，则该整流罩的外表面的面积约为



A. $2.018\times10^7\pi$ mm²

B. $1.824\times10^7\pi$ mm²

C. $1.468\times10^7\pi$ mm²

D. $1.28\times10^7\pi$ mm²

7. 已知 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-7\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=5\sqrt{2}$，则 $\tan\alpha=$

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. 2

8. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，过坐标原点 O 作两条相互垂直的直线分别与抛物线 C 相交于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 两点（M，N 均与点 O 不重合）.若直线 MN 恒过点 $(8,0)$，则 x_1+2x_2 的最小值为

A. $16\sqrt{2}$　　B. $12\sqrt{2}$　　C. $10\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

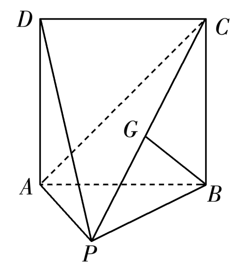
二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 若在 $(1+2x)^2+(1+2x)^3+\cdots+(1+2x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ 中，$a_0=5$，则

A. $n=7$　　B. $a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n=\frac{3^7-9}{2}$

C. $a_2=224$　　D. $a_6=64$

10. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的直径为4，四边形 $ABCD$ 为正方形，平面 $ABCD\perp$ 平面 APB，G 为棱 PC 的中点，$PA\perp PB$，$BP=\sqrt{6}$，则



A. $AB//$ 平面 PCD

B. $AP\perp BG$

C. AC 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $4\sqrt{6}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 P_1 与位于双曲线右支上的 P_2 关于 y 轴对称，点 P_1 与 P_3 关于 x 轴对称，$\angle P_1F_1F_2=60°$，M 为双曲线上一动点（不与 P_1，P_2，P_3 重合），且直线 MP_3 与 MP_2 的斜率均存在，则

A. $|P_2F_1|-|P_1F_1|=4$　　B. $P_2F_1\perp P_2F_2$

C. 四边形 $F_1F_2P_2P_1$ 的面积为 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$　　D. 直线 MP_3 与 MP_2 的斜率之积为3

12. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，$f(x+2)$为偶函数，$f(x)=g(4-2x)-g(2x)$，且当$x\in[0,2]$时，$f(x)=(x-1)^3$，则

A. $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称

B. $f(2\ 023)=1$

C. $\sum\limits_{k=1}^{100}[k\cdot f(k)]=-50$

D. 方程$f(x)=\cos\dfrac{\pi}{4}x$在区间$[-2,38]$上的所有实根之和为144

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知圆$M:x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$与圆$x^2+y^2=m$的公共弦经过点$M$，则$m=$__________.

14. 88键钢琴从左到右各键的音的频率组成一个递增的等比数列. 若中音A(左起第49个键)的频率为440 Hz，钢琴上最低音的频率为27.5 Hz，则左起第61个键的音的频率为__________Hz.

15. 将函数$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象上所有点的纵坐标保持不变，横坐标变为原来的$\dfrac{2}{\omega}$($\omega\in\mathbf{N}^*$)倍后，所得函数$g(x)$的图象在区间$(0,\pi)$上有且仅有两条对称轴和两个对称中心，则$\omega$的值为__________.

16. 设函数$f(x)=e^{2x}+a$，$g(x)=e^x+x$，若存在$x_1,x_2,\cdots,x_{2\,023}\in[-1,1]$，使得$\sum\limits_{i=1}^{2\,022}f(x_i)+g(x_{2\,023})=\sum\limits_{i=1}^{2\,022}g(x_i)+f(x_{2\,023})$成立，则实数$a$的最大值为________.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=-3$，$a_{n+1}+a_n=4n-2(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)证明$\{a_n-2(n-1)\}$为等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)设$\{a_n\}$的前$2n$项和为T_{2n}，$b_n=T_{2n}+6n$，证明：数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前$n$项和小于$\dfrac{1}{4}$.

18. (12分)

在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$a=c-2a\cos B$.

(Ⅰ)证明：$B=2A$；

(Ⅱ)若$4a=\sqrt{6}b$，$c=5$，求$\triangle ABC$的面积.

19. (12分)

某县城为活跃经济，特举办传统文化民俗节，小张弄了一个套小白兔的摊位，设x_i表示第i天的平均气温，y_i表示第i天参与活动的人数，$i=1,2,\cdots,20$，根据统计，计算得到如下一些统计量的值：$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9\ 000$，$\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$.

(Ⅰ)根据所给数据，用相关系数r(精确到0.01)判断是否可用线性回归模型拟合y与x的关系；

(Ⅱ)现有两个家庭参与套圈，A家庭3位成员每轮每人套住小白兔的概率都为$\dfrac{3}{10}$，B家庭3位成员每轮每人套住小白兔的概率分别为$\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}$，每个家庭的3位成员均玩一次套圈为一轮，每轮每人收费20元，每个小白兔价值40元，且每人是否套住相互独立，以每个家庭的盈利的期望为决策依据，问：一轮结束后，哪个家庭损失较大？

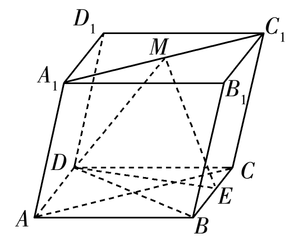
附：相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$.

20. (12分)

已知平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的各棱长均为2，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle DAB=60°$，$M,E$分别是线段$A_1C_1$，$BC$的中点.

(Ⅰ)证明：$BD\perp$平面AA_1C_1C；

(Ⅱ)求平面DME与平面AA_1C_1C的夹角的余弦值.



21. (12分)

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长是短轴长的$\sqrt{2}$倍，过椭圆$C$的右焦点$F$的直线$l$与$C$交于$P,Q$两点，且当直线$l$的倾斜角为45°时，$|PQ|=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

(Ⅰ)求椭圆C的方程；

(Ⅱ)若点P在x轴上方，E为线段PF的中点，椭圆C的左焦点为F'，直线PO(O为坐标原点)与EF'交于点A，求$\dfrac{S_{\triangle QF'A}}{S_{\triangle PQF'}}$($S$表示面积)的取值范围.

22. (12分)

已知函数$f(x)=x(\ln x-a)$在区间$[1,e]$上的最小值为-1，函数$g(x)=\dfrac{m}{2}x^2-m$，$a,m\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)求a的值；

(Ⅱ)设函数$F(x)=f(x)-g(x)$，x_1,x_2是$F(x)$的两个不同的极值点，且$x_1<x_2$，证明：$2\ln x_1+3\ln x_2>5$.