2019 北京市东城区高三二模

数　　学（文）

2019. 5

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|x<-1或x>3\}, B=\{x|x-2\geq 0\}$，则 $A\cup B=$

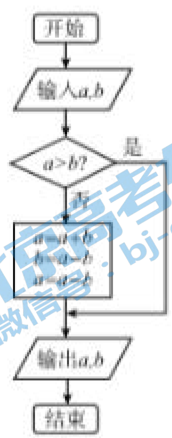
（A）$\{x|x<-1或x\geq 2\}$　（B）$\{x|-1<x\leq 2\}$　（C）$\{x|2\leq x<3\}$　（D）$\mathbf{R}$

（2）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^3$　　（B）$y=\cos x$

（C）$y=e^x$　　（D）$y=|x|+1$

（3）执行如图所示的程序框图，输入 $a=2, b=5$，那么输出的 a,b 的值分别为



（A）$7,-3$　　（B）$-3,-3$

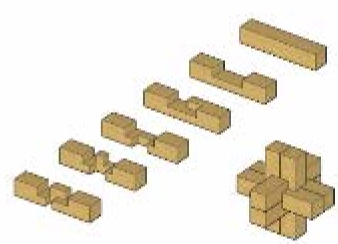
（C）$5,-3$　　（D）$5,\ 2$

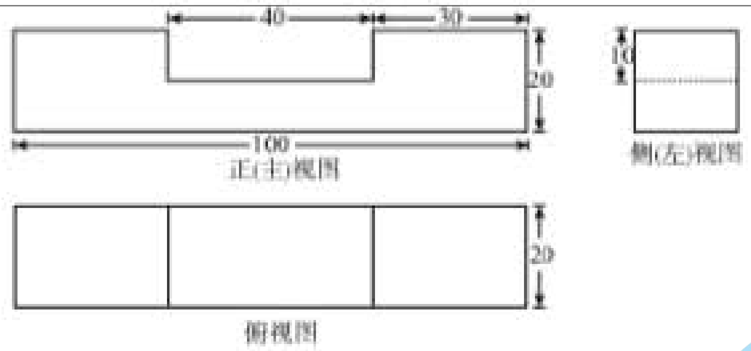
（4）若 x,y 满足 $2x-1 \# y \quad x$，则点 (x,y) 到点 $(-1,0)$ 距离的最小值为

（A）$\sqrt{5}$　　（B）$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

（5）鲁班锁起源于中国古代建筑中首创的榫卯结构，相传由春秋时代鲁国工匠鲁班所作．右图是经典的六柱鲁班锁及六个构件的图片，下图是其中一个构件的三视图，则此构件的体积为





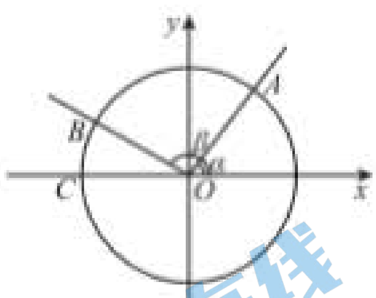
（A）$34\,000\text{mm}^3$　　（B）$33\,000\text{mm}^3$　　（C）$32\,000\text{mm}^3$　　（D）$30\,000\text{mm}^3$

（6）已知 m,n,p,q 为正整数，且 $m+n=p+q$，则在数列 $\{a_n\}$ 中，“$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$”是“$\{a_n\}$ 是等比数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（7）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，终边分别是射线 OA 和射线 OB，射线 OA，OC 与单位圆的交点分别为 $A\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，$C(-1,0)$．若 $\angle BOC=\frac{\pi}{6}$，则 $\cos(\beta-\alpha)$ 的值是



（A）$\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$　　（B）$\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$

（C）$\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$　　（D）$\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$

（8）在交通工程学中，常作如下定义：

交通流量 Q（辆/小时）：单位时间内通过道路上某一横断面的车辆数；

车流速度 V（千米/小时）：单位时间内车流平均行驶过的距离；

车流密度 K（辆/千米）：单位长度道路上某一瞬间所存在的车辆数．

一般的，V 和 K 满足一个线性关系，即 $V=v_0(1-\frac{K}{k_0})$（其中 v_0,k_0 是正数），则以下说法正确的是

（A）随着车流密度增大，车流速度增大

（B）随着车流密度增大，交通流量增大

（C）随着车流密度增大，交通流量先减小，后增大

（D）随着车流密度增大，交通流量先增大，后减小

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程为________.

（10）复数 $\dfrac{5i}{1-i}$ 的实部为________；虚部为________.

（11）在 ΔABC 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$a^2+b^2-c^2=ab$，$c=3$，则 $\angle C=$________；$a=$________.

（12）已知 $a=\log_2 9$，$b=\log_3 m$，$c=\log_5 15$，则满足 $a>b>c$ 的一个正整数 m 为________.

（13）如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，O 为 AB 的中点.

当点 P 在 BC 边上时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的值为________；当点 P 沿着 BC，CD 与 DA 边运动时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最小值为________.

（14）已知直线 l 过点 $(1,1)$，过点 $P(-1,3)$ 作直线 $m\perp l$，垂足为 M，则点 M 到点 $Q(2,4)$ 距离的取值范围为________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

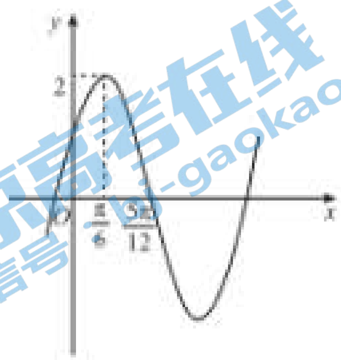
设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$a_{n+1}+2a_n=0$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和 S_n；

（Ⅱ）若等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_4$，$b_2=a_2-a_3$，问：b_{37} 与 $\{a_n\}$ 的第几项相等？

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.



（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）若对于任意的 $x\in[0,m]$，$f(x)\geq 1$ 恒成立，求 m 的最大值.

（17）（本小题 13 分）

某工厂的机器上存在一种易损元件，这种元件发生损坏时，需要及时维修．现有甲、乙两名工人同时从事这项工作，下表记录了某月 1 日到 10 日甲、乙两名工人分别维修这种元件的件数.

日期	1 日	2 日	3 日	4 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	10 日
甲维修的元件数	3	5	4	6	4	6	3	7	8	4
乙维修的元件数	4	7	4	5	5	4	5	5	4	7

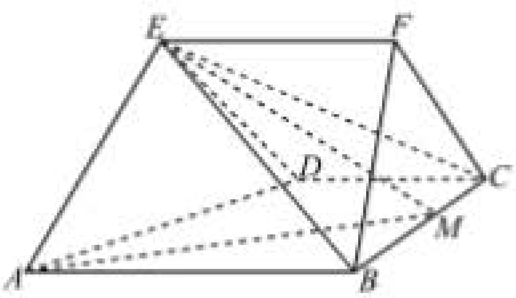
（I）从这 10 天中，随机选取一天，求甲维修的元件数不少于 5 件的概率；

（II）试比较这 10 天中甲维修的元件数的方差 s_1^2 与乙维修的元件数的方差 s_2^2 的大小．（只需写出结论）；

（III）由于甲、乙的任务量大，拟增加工人，为使增加工人后平均每人每天维修的元件不超过 3 件，请利用上表数据估计最少需要增加几名工人.

（18）（本小题 14 分）

如图所示的五面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\perp DE$，$AE=DE$，$AB\parallel CD$，$AB\perp BC$，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=AD=4$.



（Ⅰ）求四棱锥 $E-ABCD$ 的体积；

（Ⅱ）求证：$EF\parallel$ 平面 $ABCD$；

（Ⅲ）设点 M 为线段 BC 上的动点，求证：EM 与 AM 不垂直.

（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2x\ln x-x-\dfrac{1}{x}+2$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求证：$(x-1)f(x)\ge 0$．

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $F(1,0)$，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．A 为椭圆 C 的左顶点，P,Q 为椭圆 C 上异于 A 的两个动点，直线 AP,AQ 与直线 $l:x=4$ 分别交于 M,N 两点．

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）若 ΔPAF 与 ΔPMF 的面积之比为 $\dfrac{1}{5}$，求 M 的坐标；

（III）设直线 l 与 x 轴交于点 R，若 P,F,Q 三点共线，求证：$\angle MFR=\angle FNR$．

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A （2）D （3）D （4）C

（5）C （6）B （7）C （8）D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$y=?\frac{x}{2}$ （10）-2；1 （11）$\frac{\pi}{3}$；$\sqrt{6}$

（12）10 （答案不唯一） （13）2；-2 （14）$[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）依题意，数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_{n+1}=-2a_n$，

所以$\{a_n\}$是首项为 1，公比为-2的等比数列.

则$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-2)^{n-1}$，

前n项和$S_n=\frac{1\times[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{3}$. ……………………………. 7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$b_1=-8$， $b_2=-6$，

因为$\{b_n\}$为等差数列， $d=b_2-b_1=2$.

所以$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n-10$.

所以$b_{37}=2\times37-10=64$.

令$64=(-2)^{n-1}$，解得$n=7$.

所以b_{37}与数列$\{a_n\}$的第 7 项相等. ……………………..13 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由图象可知，$A=2$.

因为$\left|\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right|=\frac{T}{4}$，所以$T=\pi$.

所以$\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得$\omega=2$.

又因为函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{6},2)$，所以 $2\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=2$.

解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$.

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. ……………………………………………………. 7 分

（II）因为 $x\in[0,m]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2m+\frac{\pi}{6}\right]$，

当 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，即 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)\geq f(0)=1$，符合题意；

当 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 时，即 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)\geq f(\frac{\pi}{3})=1$，符合题意；

当 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，即 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 单调递减，

所以 $f(x)<f(\frac{\pi}{3})=1$，不符合题意；

综上，若对于任意的 $x\in[0,m]$，有 $f(x)\geq1$ 恒成立，则必有 $0<m\leq\frac{\pi}{3}$，

所以 m 的最大值是 $\frac{\pi}{3}$. …………………………………………..13 分

（17）（共 13 分）

解：（I）设 A 表示事件"从这10天中，随机选取一天，甲维修元件数不少于 5".

根据题意，$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. ………………………………………………. 4 分

（II）$s_{甲}^2>s_{乙}^2$. ……………………………………………………………………. 8 分

（Ⅲ）设增加工人后有 n 名工人.

因为每天维修的元件的平均数为

$\frac{1}{10}[(3+5+4+6+4+6+3+7+8+4)+(4+7+4+5+5+4+5+5+4+7)]=10$.

所以这 n 名工人每天维修的元件的平均数为 $\frac{10}{n}$.

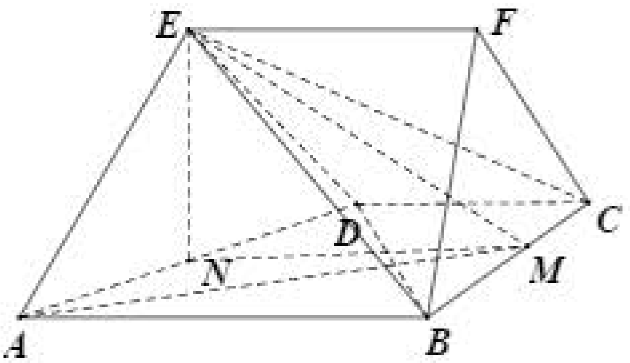
令 $\frac{10}{n}\le 3$，解得 $n\ge\frac{10}{3}$. 所以 n 的最小值为 4.

为使增加工人后平均每人每天维修的元件不超过 3 件，至少应增加 2 名工人

……….13 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）取 AD 中点 N，连接 EN.



在△ADE 中，$AE=DE$，

所以 $EN\perp AD$.

因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $ADE\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$EN\subset$ 平面 ADE，

所以 $EN\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $AE\perp DE$，$AD=4$，所以 $EN=2$.

因为 $AB\,/\!/\,CD$，$AB\perp BC$，$\angle DAB=60^\circ$，$AB=AD=4$，

所以 $S_{梯形ABCD}=6\sqrt{3}$.

所以 $V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}$. ……………..5 分

（Ⅱ）因为 $AB\,/\!/\,CD$，$AB\subset$ 平面 $ABFE$，$CD\not\subset$ 平面 $ABFE$，

所以 $CD\,/\!/$ 平面 $ABFE$.

又因为 $CD\subset$ 平面 $CDEF$，平面 $ABEF\cap$ 平面 $CDEF=EF$，

所以 $CD\,/\!/\,EF$.

因为 $CD\subset$ 平面 $ABCD$，$EF\not\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 EF // 平面 $ABCD$. ……………10 分

（III）连接 MN，假设 $EM \perp AM$.

由（I）知 $EN \perp$ 平面 $ABCD$，

因为 $AM \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EN \perp AM$.

因为 $EM \perp AM$，且 $EN \cap EM = E$，

所以 $AM \perp$ 平面 ENM.

因为 $MN \subset$ 平面 ENM，

所以 $AM \perp MN$.

在 $\triangle AMN$ 中，$AN = 2, AM \geq 4 > AN$，

所以 $\angle AMN < \angle ANM$.

所以 $\angle AMN < 90^\circ$.

这与 $AM \perp MN$ 矛盾.

所以假设不成立，即 EM 与 AM 不垂直. ……………14 分

（19）（共 13 分）

解：（I）$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f(1)=0$.

$$f'(x) = 2(1+\ln x) - 1 + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} + 2\ln x，\quad f'(1) = 2.$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 0 = 2(x-1)$.

即 $y = 2x - 2$. ……………5 分

（II）记 $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} + 2\ln x$.

$$g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}.$$

由 $g'(x) = 0$ 解得 $x = 1$.

$g(x)$ 与 $g'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$

$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	极小	↗

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 时取得最小值 $g(1)=2$．

所以 $g(x)=1+\frac{1}{x^2}+2\ln x\geq 2>0$．所以 $f'(x)>0$．

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又由 $f(1)=0$ 知,

当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，$x-1<0$，所以 $(x-1)f(x)>0$；

当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，$x-1>0$，所以 $(x-1)f(x)>0$.

所以 $(x-1)f(x)\geq 0$．……………………………………13 分

（20）（共 14 分）

解：（I）由题意得 $\begin{cases} c=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ c=1. \end{cases}$

因为 $a^2-b^2=c^2$，所以 $b^2=3$．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．……………………………………4 分

（II）因为 ΔPAF 与 ΔPMF 的面积之比为 $\frac{1}{5}$，

所以 $|AP|=\frac{1}{5}|PM|$．

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AM}$．

设 $M(4,m)(m\neq 0)$, $P(x_0,y_0)$，则 $(x_0+2,y_0)=\frac{1}{6}(6,m)$，

解得 $x_0=-1, y_0=\frac{m}{6}$．

将其代入$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，解得$m=\pm 9$.

所以M的坐标为$(4,9)$或$(4,-9)$. ……………………………… 8分

（III）设$M(4,m),N(4,n),P(x_0,y_0)$，

若$m=0$，则P为椭圆C的右顶点，由P,F,Q三点共线知，Q为椭圆C的左顶点，

不符合题意.

所以$m\neq 0$. 同理$n\neq 0$.

直线AM的方程为$y=\frac{m}{6}(x+2)$.

由$\begin{cases} y=\frac{m}{6}(x+2), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去y，整理得$(27+m^2)x^2+4m^2x+(4m^2-108)=0$.

$\Delta=(4m^2)^2-4(27+m^2)(4m^2-108)>0$成立.

由$-2x_0=\frac{4m^2-108}{27+m^2}$，解得$x_0=\frac{54-2m^2}{27+m^2}$.

所以$y_0=\frac{m}{6}(x_0+2)=\frac{18m}{27+m^2}$.

所以$P(\frac{54-2m^2}{27+m^2},\frac{18m}{27+m^2})$.

当$|m|=3$时，$|n|=3$，$\frac{54-2m^2}{27+m^2}=1$，即直线$PQ\perp x$轴.

由椭圆的对称性可得$|MR|=|FR|=|NR|=3$.

又因为$\angle MRF=\angle NRF=90^\circ$，

所以$\angle MFR=\angle FNR=45^\circ$.

当$|m|\neq 3$时，$|n|\neq 3$，

直线 FP 的斜率 $k_{FP}=\dfrac{\dfrac{18m}{27+m^2}-0}{\dfrac{54-2m^2}{27+m^2}-1}=\dfrac{6m}{9-m^2}$.

同理 $k_{FQ}=\dfrac{6n}{9-n^2}$.

因为 P,F,Q 三点共线，

所以 $\dfrac{6m}{9-m^2}=\dfrac{6n}{9-n^2}$.

所以 $mn=-9$.

在 $Rt\Delta MRF$ 和 $Rt\Delta NRF$ 中，

$\tan\angle MFR=\dfrac{|MR|}{|FR|}=\dfrac{|m|}{3}$， $\tan\angle FNR=\dfrac{|FR|}{|NR|}=\dfrac{3}{|n|}=\dfrac{|m|}{3}$，

所以 $\tan\angle MFR=\tan\angle FNR$.

因为 $\angle MFR,\angle FNR$ 均为锐角，

所以 $\angle MFR=\angle FNR$.

综上，若 P,F,Q 三点共线，则 $\angle MFR=\angle FNR$. ……………………………………14 分