9.3 (2021 年北京大学优秀中学生暑假学堂数学测试题)

1. (★☆☆☆☆) 函数 $f(x)=3x\ln x+x^3-ax+5$ 在 $(0,+\infty)$ 上非负，则 a 的最大值为_____.

解 由题 $f(x)=3x\ln x+x^3-ax+5\geqslant 0$，即 $a\leqslant 3\ln x+x^2+\dfrac{5}{x}$ 恒成立. 从而我们只需求函数 $g(x)=3\ln x+x^2+\dfrac{5}{x}$ 的最小值. 注意到

$$g'(x)=\frac{2x^3+3x-5}{x^2}=\frac{(x-1)(2x^2+2x+5)}{x^2},$$

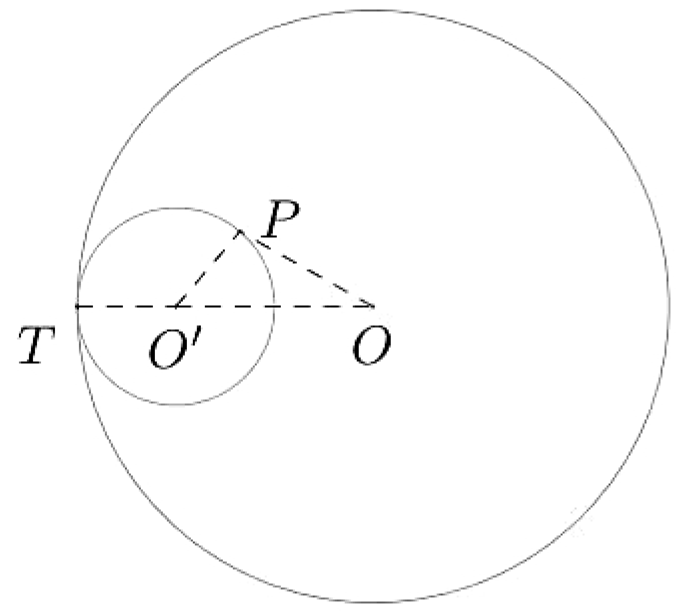
且 $2x^2+2x+5>0$，故 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取最小值，从而

$$a\leqslant g(x)_{\min}=g(1)=6.$$

从而 a 的最大值为 $\boxed{6}$.

2. (★☆☆☆☆) 平面内有定圆 C 和动圆 Γ，动圆 Γ 与定圆 C 内切且恒过 C 内不为圆心的一定点，则 Γ 的圆心轨迹为_____.

解



不妨设定圆圆心为 O，半径为 R，动圆圆心为 O'，半径为 r，定点记为 P，切点为 T. 如图所示，我们有

$$O'P+O'O=O'T+O'O=R>OP.$$

这说明 O' 点到两定点 O 与 P 的距离之和为定值 R，且大于两定点之间的距离. 因此 Γ 的圆心 O' 的轨迹为 $\boxed{\text{椭圆}}$.

3. (★☆☆☆☆) 已知 $\begin{cases}2x-5y\leqslant -6\\3x+6y\leqslant 25\end{cases}$，则 $9x+y$ 的最大值为_____.

解 注意到

$$27(9x+y)=47(3x+6y)+51(2x-5y)\leqslant 47\times 25+51\times(-6)=869,$$

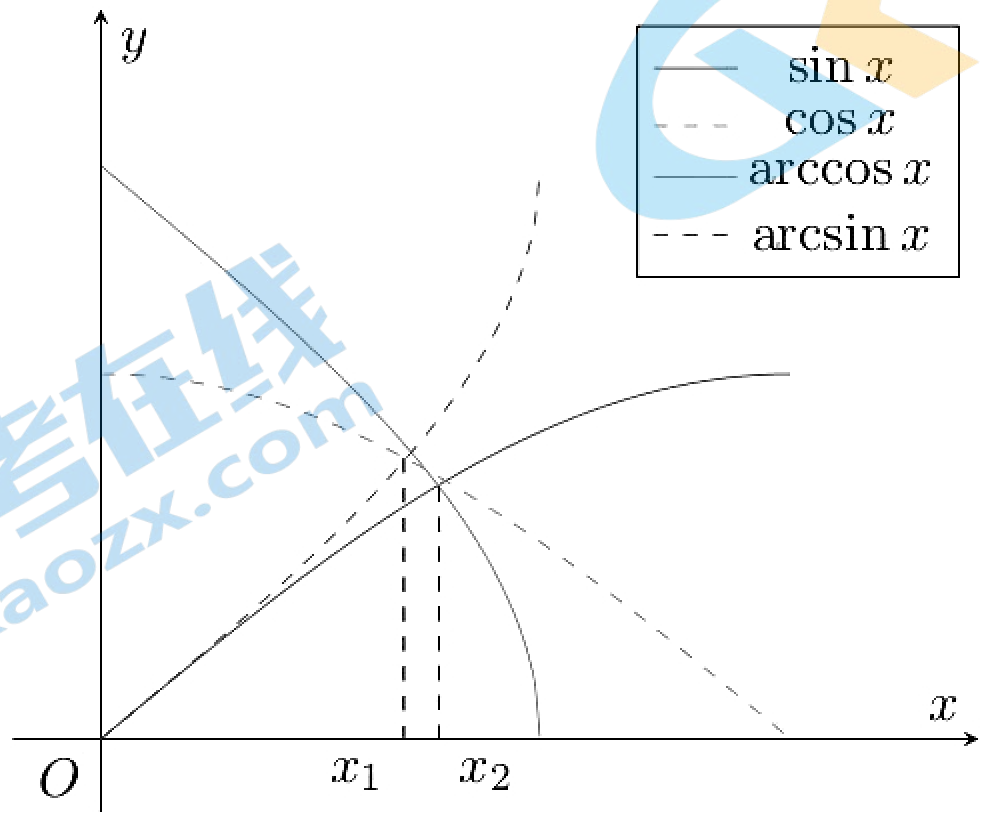
即 $9x+y\leqslant\dfrac{869}{27}$，当且仅当 $x=\dfrac{89}{27},y=\dfrac{68}{27}$ 时，等号成立. 故 $9x+y$ 的最大值为 $\boxed{\dfrac{869}{27}}$.

4. (★★☆☆☆) 已知 $0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$，且满足 $\sin(\cos x)=x$，$\cos(\sin y)=y$，则有序数对 (x,y) 的组数为_____.

解 令 $x_1=x, x_2=y$，由题可知 $0<x_1<x_2<1$，且

$$\begin{cases}\cos x_1=\arcsin x_1\\ \sin x_2=\arccos x_2\end{cases}.$$

利用函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称，我们做出 $y=\sin x, y=\cos x$ 以及 $y=\arcsin x, y=\arccos x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的大致图像，如下图：



其中 x_1 为两条虚线的交点横坐标，x_2 为两条实线的交点横坐标. 从而由图可知：有序数对 (x,y) 的组数为 $\boxed{1}$.

5. (★★☆☆☆) 已知 $x^2+4y^2=1$，则 $(x+2y)(x-y)$ 的最小值为______.

解 令 $x=\cos\theta, y=\dfrac{\sin\theta}{2}$，则我们有

$$\begin{aligned}(x+2y)(x-y)&=(\cos\theta+\sin\theta)\left(\cos\theta-\frac{\cos\theta}{2}\right)\\&=\frac{\sin(2\theta)+3\cos(2\theta)+1}{4}\\&=\frac{\sqrt{10}\sin(2\theta+\varphi)+1}{4}\quad(\text{其中 }\tan\varphi=3)\\&\geqslant\frac{1-\sqrt{10}}{4}\quad(\text{当且仅当 }\theta=\frac{3\pi-2\varphi}{4}\text{ 时等号成立})\end{aligned}$$

即 $(x+2y)(x-y)$ 的最小值为 $\boxed{\dfrac{1-\sqrt{10}}{4}}$.

6. (★★☆☆☆) 若 $4x^2+2xy+y^2-2ax-ay+2\geqslant 0$ 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}$ 恒成立，则 a 的最大值为______.

解 原题即为

$$4x^2+(2y-2a)x+y^2-ay+2\geqslant 0$$

恒成立. 所以我们有

$$\Delta_x=4(y-a)^2-16(y^2-ay+2)\leqslant 0\Rightarrow 3y^2-2ay+8-a^2\geqslant 0.$$

恒成立，从而有

$$\Delta_y = 4a^2 - 12(8-a^2) \leqslant 0 \Rightarrow -\sqrt{6} \leqslant a \leqslant \sqrt{6}.$$

于是可得 a 的最大值为 $\boxed{\sqrt{6}}$.

7. (★★★☆☆) 已知复数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2021}$ 是方程 $x^{2021}=1$ 的 2021 个相异根，则 $\sum\limits_{j=1}^{2021} \dfrac{1}{\mathrm{i}+x_j} =$______.

解 不妨令 $y_j = \dfrac{1}{\mathrm{i}+x_j}$，则 $y_1, y_2, \cdots, y_{2021}$ 是方程

$$\left(\frac{1}{y}-\mathrm{i}\right)^{2021} = 1 \Rightarrow y^{2021} + (y\mathrm{i}-1)^{2021} = 0 \tag{$*$}$$

的所有根. 将 $(*)$ 式展开得

$$(1+\mathrm{i})y^{2021} - 2021y^{2020} + \cdots = 0.$$

从而由韦达定理知

$$\sum_{j=1}^{2021} \frac{1}{\mathrm{i}+x_j} = \sum_{j=1}^{2021} y_j = \boxed{\frac{2021}{1+\mathrm{i}}}.$$

8. (★★★☆☆) 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1, a_2=2, a_3=3$，且当 $n \geqslant 3$ 时，有 $a_{n+1} = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i - 1$. 记 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - \prod\limits_{i=1}^{n} a_i$，则 S_{2021} 的值为______.

解 注意到，当 $n \geqslant 3$ 时，有

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 - \prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \prod_{i=1}^{n} a_i\right) \\ &= a_{n+1}^2 - \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(a_{n+1}-1) \\ &= a_{n+1}^2 - (a_{n+1}+1)(a_{n+1}-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

从而我们有

$$S_{2021} = (2021-3) + S_3 = 2018 + 1^2 + 2^2 + 3^2 - 1 \times 2 \times 3 = \boxed{2026}.$$

9. (★★★☆☆) 和式 $\sum\limits_{i=1}^{999999} i^{2021}$ 的计算结果最后三位数字为______.

解 注意到对任意的 $1 \leqslant k \leqslant 499$，我们有

$$k^{2021} + (1000-k)^{2021} \equiv k^{2021} + (-k)^{2021} \equiv 0 \pmod{1000},$$

且显然 $1000 \mid 500^{2021}, 1000 \mid 1000^{2021}$. 所以

$$\sum_{i=1}^{999999} i^{2021} \equiv 999 \times \sum_{i=1}^{1000} i^{2021} + \sum_{j=1}^{999} j^{2021} \equiv 0 \pmod{1000}.$$

从而末三数字为 $\boxed{000}$.

10. (★★★☆☆) 实数 $50 \times \left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}$ 的十进制小数表示中个位数字与十位数字之和为______.

解 注意到当 $n \geqslant 2$ 时，我们有 $0 < 50 \times \left(7-4\sqrt{3}\right)^n < 1$，同时

$$50 \times \left(7+4\sqrt{3}\right)^n + 50 \times \left(7-4\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{Z}.$$

从而有

$$\left\lfloor 50 \times \left(7+4\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor = 50 \times \left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(7-4\sqrt{3}\right)^n\right] - 1.$$

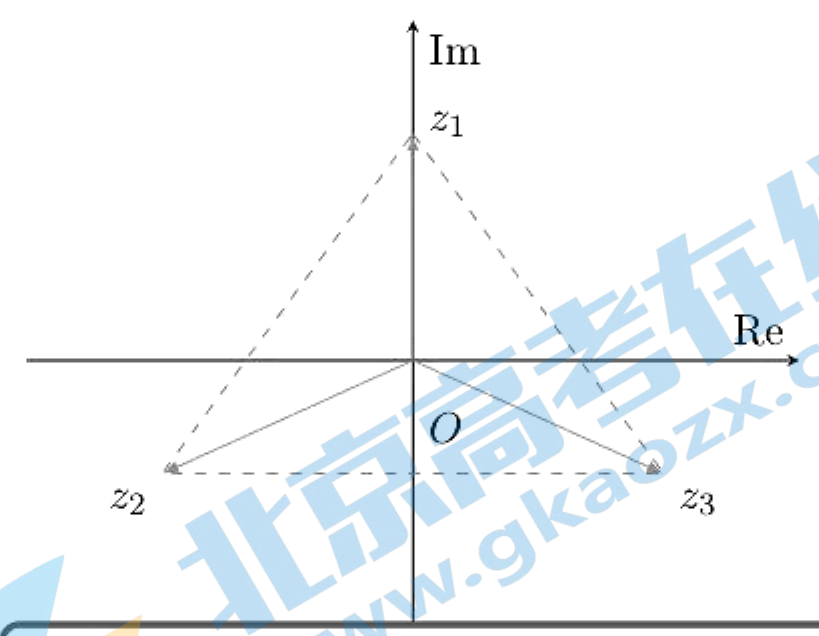
由于 $2 \,\Big|\, \left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(7-4\sqrt{3}\right)^n$，故 $100 \,\Big|\, 50 \times \left[\left(7+4\sqrt{3}\right)^n + \left(7-4\sqrt{3}\right)^n\right]$. 因此我们有

$$\left\lfloor 50 \times \left(7+4\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor \equiv -1 \equiv 99 \pmod{100}.$$

这说明实数 $50 \times \left(7+4\sqrt{3}\right)^{2021}$ 的个位数字与十位数字之和为 $9+9=\boxed{18}$.

11. (★★★☆☆) 设 $p \in \mathbb{R}$，方程 $z^3+pz+8\mathrm{i}=0$ 的三个根在复平面构成一个等边三角形的三个顶点，则该等边三角形的面积为______.

解 我们容易知道若 $a+b\mathrm{i}$ 为方程 $z^3+pz+8\mathrm{i}=0$ 的根，则 $-a+b\mathrm{i}$ 也为 $z^3+pz+8\mathrm{i}=0$ 的根. 注意到由题知方程 $z^3+pz+8\mathrm{i}=0$ 共有三个不等根，这说明其必存在纯虚根，不妨设为 $z_1=r\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$($z_1=r\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}$ 不合题意)，则其余两根为 $z_2=r\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i}}, z_3=r\mathrm{e}^{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{i}}$.



从而由韦达定理我们有

$$z_1z_2z_3=-r^3\mathrm{i}=-8\mathrm{i} \Rightarrow r=2.$$

故有 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$, 于是可得

$$S_{\Delta z_1z_2z_3}=\frac{3}{2}\times|z_1|^2\sin\frac{2\pi}{3}=3\sqrt{3}.$$

从而该等边三角形的面积为 $\boxed{3\sqrt{3}}$.

12. (★★★☆☆) 已知 $\dfrac{(2x+1)^{4042}}{(x+1)^{2021}}=\sum\limits_{i=0}^{2021}a_ix_i+\dfrac{1}{(x+1)^{2021}}\sum\limits_{j=0}^{2020}b_jx^j$ 对任意的实数 x 均成立，则 $a_{2020}=$______.

解 考虑更一般的情形：若 $\dfrac{(2x+1)^{2n}}{(x+1)^n}=\sum\limits_{i=0}^{2021}a_ix_i+\dfrac{1}{(x+1)^n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}b_jx^j$，则 $a_{n-1}=0$. 事实

上，我们注意到

$$(2x+1)^{2n}=[2(x+1)-1]^{2n}=2^{2n}(x+1)^{2n}-2n\cdot 2^{2n-1}(x+1)^{2n-1}+\cdots,$$

从而有

$$\frac{(2x+1)^{2n}}{(x+1)^{n}}=2^{2n}(x+1)^{n}-2n\cdot 2^{2n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots.$$

所以 x^{n-1} 的系数 $a_{n-1}=2^{2n}\cdot \mathrm{C}_n^1-2n\cdot 2^{2n-1}=0$.

回到原题，当 $n=2021$ 时，有 $a_{2020}=\boxed{0}$.

13. (★★★★☆☆) 已知 x,y,z,w 满足方程

$$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{2}y-\sqrt{3}z+\sqrt{6}w\right)=2021,$$

则有理数对 (x,y,z,w) 的对数为______.

解 由于 $\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z+\sqrt{6}w\right)=2021$，则有

$$\begin{aligned}x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z+\sqrt{6}w&=\frac{2021}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}}\\&=\frac{2021}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}\\&=\frac{2021}{2}-\frac{2021\sqrt{2}}{2}-\frac{2021\sqrt{3}}{2}+\frac{2021\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

也即

$$\left(x-\frac{2021}{2}\right)-\sqrt{2}\left(y+\frac{2021}{2}\right)+\sqrt{3}\left(z+\frac{2021}{2}\right)+\sqrt{6}\left(w-\frac{2021}{2}\right)=0.$$

由于 $\left\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\right\}$ 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，则

$$x=\frac{2021}{2},y=-\frac{2021}{2},z=-\frac{2021}{2},w=\frac{2021}{2}.$$

从而有理数对 (x,y,z,w) 的对数为 $\boxed{1}$.

14. (★★★★☆☆) 我们用 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，用 $\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分，则关于 n 的不等式 $1-\left[\sqrt{n^2+1}+n\right]\cdot\left\{\sqrt{n^2-1}+n\right\}<10^{-6}$ 的最小整数解为______.

解 显然有 $n>0$，且 $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$，则有

$$\left[\sqrt{n^2+1}+n\right]=2n,\left\{\sqrt{n^2+1}+n\right\}=\sqrt{n^2+1}-n,$$

从而原不等式转化为

$$2n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}>1-10^{-6}.$$

不妨令 $m=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$，则 $n=\dfrac{1-m^2}{2m}$，故

$$2n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=1-m^2>1-10^{-6}\Rightarrow m<10^{-3}.$$

即 $n > \dfrac{1-10^{-6}}{2\times 10^{-3}} = \dfrac{999999}{2000} = 499.9995$，所以最小整数解为 $\boxed{n=500}$.

15. (★★★★☆) 已知 a,b,c 为三角形三边长，则 $\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}$ 的取值范围为______.

解 为了消除三角形的三边关系限制，不妨令

$$\begin{cases} a = x+y \\ b = x+z \\ c = y+z \end{cases}，其中\ x,y,z>0.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} &= \frac{\sum(x+y)(x+z)}{\left[\sum(x+y)\right]^2}\\ &= \frac{(\sum x)^2+\sum xy}{4(\sum x)^2}.\end{aligned}$$

于是不失一般性，我们可令 $\sum x = 1$，则问题转化为求 $\dfrac{1}{4}(1+\sum xy)$ 的范围. 注意到由切比雪夫不等式有

$$\sum xy \leqslant \frac{1}{3}\left(\sum x\right)\left(\sum y\right) = \frac{1}{3}\times 1\times 1 = \frac{1}{3},$$

所以 $\dfrac{1}{4}(1+\sum xy) \leqslant \dfrac{1}{3}$，当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立.
另一方面，令 $x\to 0, y\to 0, z\to 1$，我们有

$$\frac{1}{4}(1+\sum xy) \to \frac{1}{4}.$$

综上所述，我们知 $\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}$ 的取值范围为 $\boxed{\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]}$.

16. (★★★★☆) 设 $\dfrac{1}{2021}$ 有 m 种方式分为 3 个正整数的倒数之和，有 n 种方式分为 3 个正奇数的倒数之和，则 (　　).

A. $m=n=1$　　B. $m\leqslant 6, n\geqslant 1$　　C. $m=3, n=1$　　D. 以上均不正确

解 本题不可能短时间手工直接求出 m 和 n，只能用排除法做此题. 注意到

$$\frac{1}{2021} = \frac{1}{43}\times\frac{1}{47},$$

这里考虑将 $\dfrac{1}{43}$ 分为 3 个正整数的倒数之和. 由于

$$\frac{1}{43}-\frac{1}{44} = \frac{1}{1892} = \frac{1}{1\times 2^2\times 11\times 43},$$

且有恒等式

$$\frac{1}{abc} = \frac{1}{ac(a+b)} + \frac{1}{bc(a+b)}.$$

不妨取

$$(a,b,c)=(1,1,1892),(1,2,946),(1,4,473),(1,11,172),(1,43,44),(1,44,43),(1,1892,1)$$

则说明 $\frac{1}{43}$ 已经有 7 种方式表示成三个正整数的倒数之和，具体来说，即：

$$\begin{aligned}\frac{1}{43}&=\frac{1}{44}+\frac{1}{3784}+\frac{1}{3784}=\frac{1}{44}+\frac{1}{2838}+\frac{1}{5676}=\frac{1}{44}+\frac{1}{2365}+\frac{1}{9460}\\&=\frac{1}{44}+\frac{1}{2064}+\frac{1}{22704}=\frac{1}{44}+\frac{1}{1936}+\frac{1}{83248}=\frac{1}{44}+\frac{1}{1935}+\frac{1}{85140}\\&=\frac{1}{44}+\frac{1}{1893}+\frac{1}{3581556}.\end{aligned}$$

从而显然选择 D 选项.

17. (★★★★☆) 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，且满足 $\sin\alpha=\alpha\sin\beta$，则 β 与 γ 的大小关系为______.

解 假设 $\beta\geqslant\gamma$，由题可知

$$\sin(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma-\pi)\sin\beta=0. \tag{$*$}$$

不妨令以 γ 为自变量的函数

$$f(\gamma)=\sin(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma-\pi)\sin\beta,$$

则有 $f'(\gamma)=\cos(\beta+\gamma)+\sin\beta$ 且 $f''(\gamma)=-\sin(\beta+\gamma)$. 注意到 $\beta+\gamma\leqslant 2\beta<\pi$，则 $f''(\gamma)<0$，从而 $f'(\gamma)$ 单调递减，即

$$f'(\gamma)\geqslant\cos(2\beta)+\sin\beta=1-2\sin^2\beta+\sin\beta=(1-\sin\beta)(2\sin\beta+1)>0.$$

这说明 $f(\gamma)$ 单调递增，即

$$f(\gamma)\leqslant f(\beta)=\sin(2\beta)+(2\beta-\pi)\sin\beta=2\left[\cos\beta-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right]\sin\beta.$$

注意到

$$\cos\beta-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)<0,$$

所以 $f(\gamma)<0$，也即

$$\sin(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma-\pi)\sin\beta<0,$$

与 $(*)$ 式矛盾，从而假设不成立. 因此有 $\boxed{\beta<\gamma}$.

18. (★★★★★) 方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2+\sqrt{x+y}$ 的整数解的组数为______.

解 对方程两边平方可得

$$\sqrt{xy}=2+2\sqrt{x+y},$$

再次两边平方可得

$$xy=4+4(x+y)+8\sqrt{x+y}.$$

由于 x,y 都是整数，所以 $\sqrt{x+y}\in\mathbb{N}$，不妨令 $x+y=p^2$，其中 $p\geqslant 2$ 且为整数. 从而有

$$\begin{cases}x+y=p^2\\ xy=4(p+1)^2\end{cases},$$

这说明 x,y 是关于 t 的方程 $t^2-p^2t+4(p+1)^2=0$ 的两根, 故我们有

$$\Delta=p^4-16(p+1)^2=(p+2)^2[(p-2)^2-8]$$

是个平方数，所以 $(p-2)^2-8$ 是一个平方数，不妨令 $(p-2)^2-8=q^2$，即

$$(p-q-2)(p+q-2)=2^3.$$

从而有

$$\begin{cases}p-q-2=2\\ p+q-2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=1\\ p=5\end{cases}.$$

故 x,y 是关于 t 的方程 $t^2-25t+144=0$ 的两根，所以 $(x,y)=(9,16)$ 或 $(16,9)$，即原方程的整数解的组数为 $\boxed{2}$.

19. (★★★★★) 已知实数 x,y 满足 $(4x^3-3x)^2+(4y^3-3y)^2=1$，则 $x+y$ 的最大值为______.

解 不妨令 $\begin{cases}4x^3-3x=\cos 3\theta\\ 3y-4y^3=\sin 3\theta\end{cases}$，由三倍角公式我们有 $\begin{cases}x=\cos\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{3}\right), & k=0,1,2\\ y=\sin\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{3}\right), & k=0,1,2\end{cases}$.

从而可知 $x+y$ 可以分为 3 类.

第一类:

$$x+y=\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right)+\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3+8k\pi}{12}\right)\leqslant\sqrt{2},\ k=0,1,2.$$

第二类:

$$\begin{aligned}x+y&=\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right)+\sin\left[\theta+\frac{2(k+1)\pi}{3}\right]\\&=\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=2\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{12}\\&\leqslant\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ k=0,1,2.\end{aligned}$$

第三类:

$$\begin{aligned}x+y&=\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right)+\sin\left[\theta+\frac{2(k+2)\pi}{3}\right]\\&=\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)\\&=2\cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{5\pi}{12}\\&\leqslant\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ k=0,1,2.\end{aligned}$$

从而 $x+y$ 的最大值为 $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$.

20. (★★★★★) 集合 $\{1,2,\cdots,2021\}$ 的非空子集中元素和为 3 的倍数的集合个数为______.

解 为了简化讨论我们将空集考虑进计算，并认为空集元素和为零. 记集合

$$A_n=\{1,2,\cdots,3n,3n+1,3n+2\},$$

a_n 为 A_n 子集中元素和为 3 的倍数的集合 (简称为 3 倍集) 的个数，b_n 为 A_n 子集中元素和模 3 余 1 的集合的个数，c_n 为 A_n 子集中元素和模 3 余 2 的集合的个数.

下面考察集合

$$A_{n+1}=\{1,2,\cdots,3n,3n+1,3n+2,3n+3,3n+4,3n+5\}$$

中 3 倍集的构成，共有四类 (考察新增元素 $3n+3,3n+4,3n+5$):

① 不含元素 $3n+3,3n+4,3n+5$ 的集合，共有 a_n 个.

② 只包含元素 $3n+3$ 的集合，共有 a_n 个；同时包含元素 $3n+4,3n+5$ 的集合，共有 a_n 个; 同时包含元素 $3n+3,3n+4,3n+5$ 的集合，共有 a_n 个.

③ 只包含元素 $3n+4$ 的集合，共有 c_n 个；同时包含元素 $3n+3,3n+4$ 的集合，共有 c_n 个.

④ 只包含元素 $3n+5$ 的集合，共有 b_n 个；同时包含元素 $3n+3,3n+5$ 的集合，共有 b_n 个.

因此我们有

$$a_{n+1}=4a_n+2b_n+2c_n,$$

同理可得 $b_{n+1}=4b_n+2a_n+2c_n$. 上述两式相减可得 $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n-b_n)$. 我们容易知道 $a_1=12,b_1=10\Rightarrow a_1-b_1=2$，故 $a_n-b_n=2^n$. 同理我们有 $a_n-c_n=2^n$，即有

$$\begin{cases}a_n-b_n=2^n\\ a_n-c_n=2^n\end{cases}\Rightarrow 2a_n-(b_n+c_n)=2^{n+1}.$$

同时我们熟知

$$a_n+b_n+c_n=2^{3n+2}\Rightarrow a_n=\frac{2^{n+1}+2^{3n+2}}{3}.$$

我们用 $\hat{a}_n$ 表示 A_n 非空子集中 3 倍集的个数，则由上述分析知

$$\hat{a}_n=\frac{2^{n+1}+2^{3n+2}-3}{3}.$$

回到原题，此时 $n=673$，故个数为 $\boxed{\dfrac{2^{674}+2^{2021}-3}{3}}$.