

天一大联考
2023—2024 学年安徽高三(上)期末质量检测

数 学

考生注意:

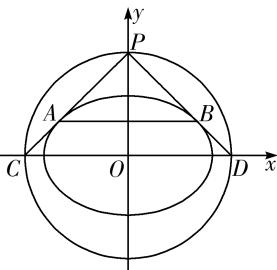
1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \left\{x \left| 2^x > \frac{1}{2}\right.\right\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $(-2, -1)$
 - B. $(-1, 4)$
 - C. $(-2, 1)$
 - D. $(1, 4)$
2. 已知复数 z 满足 $\frac{3z-4}{4z-2} = i$, 则 $|z| =$
 - A. $\frac{2}{5}$
 - B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 - C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 - D. $\frac{6}{5}$
3. 已知点 $A(-4, -2\sqrt{3})$, $B(-2, 0)$, $C(\sqrt{3}, m)$, O 为坐标原点, 若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ 与 \overrightarrow{OC} 共线, 则 $m =$
 - A. 0
 - B. 1
 - C. 2
 - D. 3
4. 若 $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{4}{5}$, 则 $\cos(2\alpha + \pi) =$
 - A. $-\frac{7}{25}$
 - B. $-\frac{3}{5}$
 - C. $\frac{3}{5}$
 - D. $\frac{7}{25}$
5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+1)$ 为奇函数, $f(x+2)$ 为偶函数, 且 $f(2) = 4$, 则 $f(20) =$
 - A. 4
 - B. 2
 - C. -4
 - D. -20
6. 已知 AB 是圆锥 PO 底面的直径, O 为底面圆心, C 为半圆弧 AB 的中点, D, E 分别为线段 PA, BC 的中点, $PA = 2\sqrt{5}$, $AB = 4$, 则异面直线 CD 与 PE 所成角的余弦值为
 - A. $\frac{\sqrt{26}}{26}$
 - B. $\frac{11\sqrt{2}}{18}$
 - C. $\frac{5\sqrt{26}}{26}$
 - D. $\frac{3\sqrt{39}}{26}$

7. 法国数学家蒙日发现椭圆两条相互垂直的切线的交点的轨迹是圆,这个圆被称为“蒙日圆”,它的圆心与椭圆中心重合,半径的平方等于椭圆长半轴和短半轴的平方和. 如图所示为椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 及其蒙日圆 O , 点 P, C, D 均为蒙日圆与坐标轴的交点, PC, PD 分别与 E 相切于点 A, B , 若 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 的面积比为 $4:9$, 则 E 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



8. 已知 $\log_6 a = \frac{1}{4}$, $\log_4 b = \frac{1}{3}$, $c = (1 + e)^{\frac{1}{e}}$, 则

- A. $a < b < c$
- B. $b < c < a$
- C. $b < a < c$
- D. $a < c < b$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

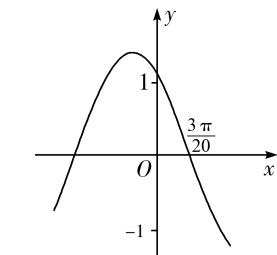
9. 党的二十大作出“发展海洋经济,保护海洋生态环境,加快建设海洋强国”的战略部署. 如图是 2018—2023 年中国海洋生产总值的条形统计图,根据图中数据可知下列结论正确的是



- A. 从 2018 年开始,中国海洋生产总值逐年增大
- B. 从 2019 年开始,中国海洋生产总值的年增长率最大的是 2021 年
- C. 这 6 年中国海洋生产总值的极差为 15 122
- D. 这 6 年中国海洋生产总值的 80% 分位数是 94 628

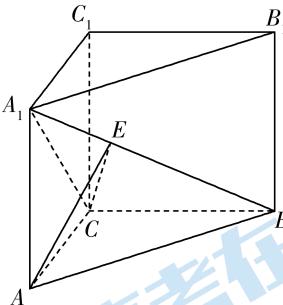
10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \cos(2x + \varphi) \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$ 的部分图象如图所示,则

- A. $\varphi = \frac{\pi}{5}$
- B. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上单调递增
- C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{5}$ 对称
- D. $f\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$ 为偶函数



11. 已知直线 $y = x + m$ 与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 相切于点 P , 过 P 作两条斜率互为相反数的直线, 这两条直线与 C 的另一个交点分别为 A, B , 直线 $y = 2x - 4$ 与 C 交于 M, N 两点, 则
 A. $m = 4$
 B. 线段 AB 中点的纵坐标为 -4
 C. 直线 AB 的斜率为 -1
 D. 直线 PM, PN 的斜率之积为 4

12. 如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC, AA_1 = AC = CB = 2, E$ 在线段 A_1B 上且 $AE \perp A_1B$, 则
 A. $AE \perp A_1C$
 B. 四棱锥 $A_1 - BB_1C_1C$ 的外接球的一条直径为 A_1B
 C. 三棱锥 $E - AA_1C$ 的外接球表面积为 12π
 D. 三棱锥 $E - ABC$ 的外接球体积为 $4\sqrt{3}\pi$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若圆 $C: x^2 + y^2 + mx + 4y - 1 = 0$ 关于直线 $y = 3x + 1$ 对称, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $(x+y)(2x-y)^6$ 的展开式中 x^3y^4 的系数为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用数字作答)

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{2+x} - 1, & x \leq 0, \\ \frac{2}{3}(x-1) - \log_2 x, & x > 0, \end{cases}$ 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

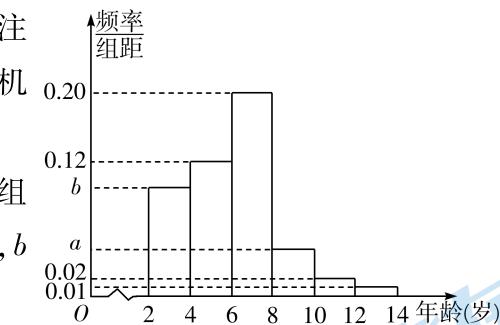
16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n+3}, S_n = a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_{n+1}$, 若对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 不等式 $4\lambda(n+3)S_n < n+2$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在当今信息泛滥的时代, 很多因素容易分散孩子们的注意力. 某儿童注意力训练机构从 2~14 岁的学员中随机抽取了 50 名学员, 得到相关数据如图所示:

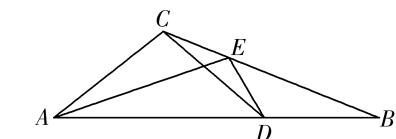
- (I) 若抽取的这 50 名学员的平均年龄为 6.2 岁(每组数据以所在区间的中点值为代表), 求图中 a, b 的值;
 (II) 从所抽取的年龄在 $[2, 4), [6, 8), [8, 10)$ 内的学员中, 按照人数比例用分层随机抽样的方法抽取 7 人, 再从这 7 人中任选 3 人, 记这 3 人中年龄在 $[6, 8)$ 内的学员人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望.



18. (12 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB$ 的平分线交 BC 边于点 E , 点 D 在 AB 边上, $AE = 7, AD = 3\sqrt{7}$, $\cos \angle CAE = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

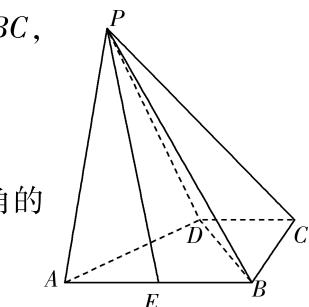
- (I) 求 $\angle ADE$ 的大小;
 (II) 若 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\triangle CDE$ 的面积.



19. (12 分)

如图, 四棱锥 $P - ABCD$ 的体积为 1, 平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD, AB \perp BC, AB \parallel CD, AB = 2BC = 2CD = 2, PD = \sqrt{5}$, $\angle PDC$ 为钝角.

- (I) 证明: $PA = PD$;
 (II) 若点 E 在棱 AB 上, 且 $AD \perp PE$, 求直线 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值.



20. (12 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 2a_3$, 且数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是等比数列.

- (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (II) 设 $b_n = (n+1)a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_n < \frac{9}{4}$.

21. (12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(3, 0)$, 且 C 过点 $P(5, 4)$.

- (I) 求 C 的方程;
 (II) 设点 $Q\left(\frac{5}{3}, y_0\right) (y_0 \neq 0)$, O 为坐标原点, 直线 QF 与 C 的右支交于 A, B 两点, 过点 Q 作直线 OA 的平行线 l, l 与 x 轴交于点 R , 与直线 OB 交于点 G , 证明: G 为线段 QR 的中点.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = ax + \ln x, a \in \mathbb{R}$.

- (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 (II) 若函数 $g(x) = ax^2 + 2x - f(x)$ 有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.