

昌平一中高一年级 2021~2022 学年度第一学期期中考试

【数学】

2021 年 10 月

本试卷分第一部分和第二部分两部分。考生务必将两部分的答案按**要求**答在**答题纸**相应题的后面。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 则 $P \cap \complement_U Q =$ ()

A. $\{1, 2\}$

B. $\{3, 4, 5\}$

C. $\{1, 2, 6, 7\}$

D. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. 命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \neq x$ ” 的否定是 ()

A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 \neq x$

B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 = x$

C. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 \neq x$

D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 = x$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & (x \leq 1) \\ -x+3, & (x > 1) \end{cases}$, 那么 $f\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ 的值是 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{9}{2}$

4. 函数 $f(x) = x^3 + 2x - 1$ 一定存在零点的区间是 ()

A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $(1, 2)$

5. 设 a, b 是实数, 则 “ $a > b$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

下列函数中，对于任意的 $x(x \in \mathbb{R})$ ，都有 $f(-x) = f(x)$ ，且在区间 $(0, 1)$ 上单调递增的是()

A. $f(x) = -x^2 + 2$

B. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

C. $f(x) = x^2 - 1$

D. $f(x) = x^3$

7. 若函数 $y = x + \frac{1}{x-2}$ ($x > 2$) 在 $x = a$ 处取得最小值，则 a 的值为()

A. $1 + \sqrt{2}$

B. $1 + \sqrt{3}$

C. 3

D. 4

8. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 6]$ 上为减函数，则 a 的取值范围是()

A. $[-5, +\infty)$

B. $(-\infty, -5]$

C. $(-\infty, 7]$

D. $[5, +\infty)$

9. 如果二次函数 $y = x^2 - kx + (3-k)$ 有两个不同的零点，那么 k 的取值范围是()

A. $(-6, 2)$

B. $(-2, 6)$

C. $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

D. $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

10. 如图所示， $f(x)$ 是定义在区间 $[-c, c]$ ($c > 0$) 上的奇函数，令 $g(x) = af(x) + b$ ，并有关于函数 $g(x)$ 的四个论断：

① 对于 $[-c, c]$ 内的任意实数 m, n ($m < n$)， $\frac{g(n) - g(m)}{n - m} > 0$ 恒成立；

② 若 $b = 0$ ，则函数 $g(x)$ 是奇函数；

③ 若 $a \geq 0, b < 0$ ，则方程 $g(x) = 0$ 必有 3 个实数根；

④ 若 $a > 0$ ，则 $g(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的单调性。

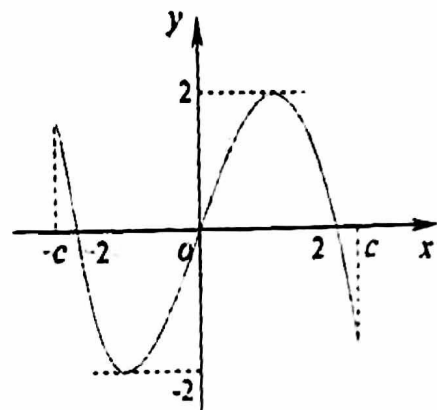
其中正确的是()

A. ②③

B. ①④

C. ①③

D. ②④



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在答题卡上.

11. 已知集合 $M = \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$, 且 $-3 \in M$, 则实数 a 的取值所组成的集合为_____.

12. 计算: $27^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} - (\frac{1}{2})^{-2} - (\frac{8}{27})^{-\frac{2}{3}} =$ _____.

13. 函数 $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x+1}$ 的定义域是_____. (写成区间或集合)

14. 若函数 $f(x)$ 满足下列性质:

① 定义域为 \mathbf{R} , 值域为 $[1, +\infty)$; ② 满足 $f(2+x) = f(2-x)$; ③ 对任意 $x_1,$

$x_2 \in (-\infty, 0)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,

请写出函数 $f(x)$ 的一个解析式_____. (只要写出一个即可).

15. 定义在 \mathbf{R} 上的单调增函数 $f(x)$ 满足: 任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都

$f(x+y) = f(x) + f(y)$. 则 $f(0) =$ _____; 若 $f(kx) + f(x-x^2-1)$

对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共6小题，共85分。解答题应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本题满分13分)

已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-3}{x-7} < 0 \right\}$, $B = \{ x \mid x^2 - 12x + 20 < 0 \}$, $C = \{ x \mid 5-a < x < a \}$.

(I) 求 $A \cup B$, $(C_{\mathbb{R}} A) \cap B$;

(II) 若 $C \subseteq (A \cup B)$, 求实数 a 的取值范围.

17. (本题满分13分)

已知函数 $f(x) = 1 + \frac{x-|x|}{4}$.

(I) 用分段函数的形式表示函数 $f(x)$;

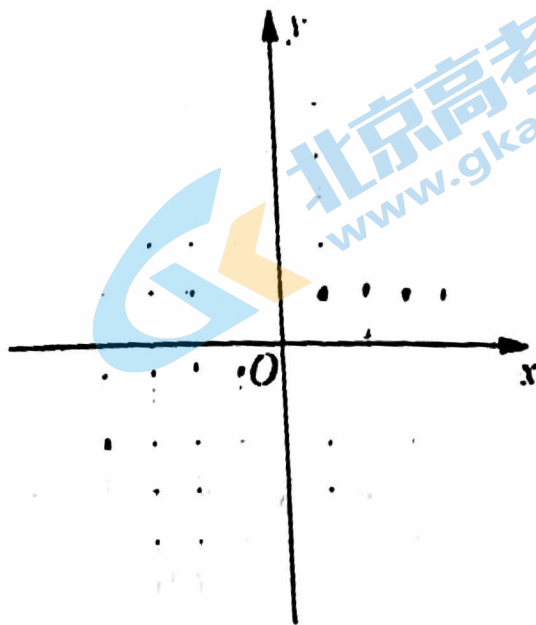
(II) 在坐标系中画出函数 $f(x)$ 的图象

(不用列表);

(III) 在同一坐标系中, 再画出函数

$g(x) = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象 (不用列表), 观察

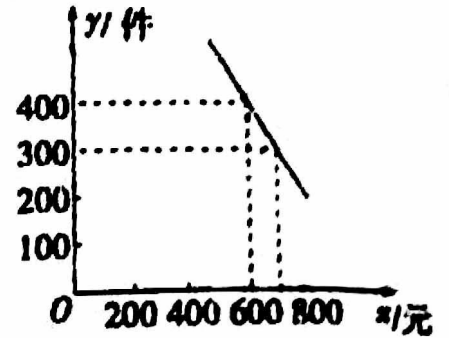
图象直接写出当 $x > 0$ 时, 不等式 $f(x) > \frac{1}{x}$ 的解集.



18 (本题满分14分)

某公司试销一种成本单价为500元的新产品，规定试销时销售单价不低于成本单价，又不高于800元，经试销调查，发现销售量 y (件)与销售单价 x (元)之间的关系可近似看作一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，函数图象如图所示。

- (I) 根据图象，求一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的表达式；
- (II) 设公司获得的毛利润(毛利润 = 销售总价 - 成本总价)为 S 元，试问销售单价定为多少时，该公司可获得最大毛利润？最大毛利润是多少？此时的销售量是多少？



19. (本题满分 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$

(I) 求 $f(f(3))$ 的值;

(II) 判断函数在 $(1, +\infty)$ 上单调性, 并用定义加以证明.

(III) 当 x 取什么值时, $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 的图像在 x 轴上方?



20. (本题满分15分)

已知 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ ，且 $f(x)$ 是奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = -x^2 + bx + c$ ，若 $f(1) = f(3)$ ， $f(2) = 2$

(I) 求 b, c 的值及 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时的表达式；

(II) 求 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时的表达式；

(III) 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ ($a \in \mathbb{R}$) 有解，求 a 的取值范围。

21. (本题满分15分)

设函数 $f(x)$ 的定义域是 \mathbf{R} ，对于任意实数 m, n ，都有 $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$ ，且当 $x > 0$ 时， $0 < f(x) < 1$ 。

(I) 若 $f(1) = \frac{1}{2}$ ，求 $\frac{f^2(1) + f(2)}{f(1)}$ 的值；

(II) 求证： $f(0) = 1$ ，且当 $x < 0$ 时，有 $f(x) > 1$ ；

(III) 判断 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的单调性，并加以证明。