2023 北京大兴高二（下）期中

数　　学

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）$(\sin 2x)' =$

（A）$\sin 2x$　　（B）$2\sin 2x$

（C）$\cos 2x$　　（D）$2\cos 2x$

（2）若 $A_n^2 = 12$，则 $n =$

（A）2　　（B）3

（C）4　　（D）5

（3）若函数 $f(x) = x^2$，则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

（4）从1，2，3，4中任取3个数字组成没有重复数字的三位数的个数为

（A）18　　（B）24

（C）27　　（D）64

（5）已知过点$(-1,0)$的直线与曲线 $y = e^x$ 的相切于点 A，则切点 A坐标为

（A）$(0,1)$　　（B）$(1,e)$

（C）$(2,e^2)$　　（D）$(3,e^3)$

（6）已知4名同学分别从3个社区中选择1个社区参加垃圾分类宣传活动，则不同选法的种数是

（A）A_4^3　　（B）A_3^3

（C）3^4　　（D）4^3

（7）下列不等式中，对任意的 $x \in (0,+\infty)$ 不恒成立的是

（A）$\ln x < x$　　（B）$2^x > x^2$

（C）$\sin x < x$　　（D）$e^x > x$

（8）设函数 $f(x) = x^3 - ax + 1$（$a \in \mathbf{R}$），则"$a \leqslant 0$"是"$f(x)$在定义域上是增函数"的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知函数 $f(x)$ 的定义域为$\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x) = a(x-a)(x-1)$，若 $f(x)$ 在 $x = 1$

处取得极大值，则实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,0)$ （B）$(0,1)$

（C）$(1,+\infty)$ （D）$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

（10）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\ln x, x>1,\\ x+1, x\leqslant 1.\end{cases}$ 若 $x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_2-x_1 的最小值为

（A）$3-2\ln 2$ （B）$4-2\ln 3$

（C）2 （D）$\mathrm{e}-1$

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

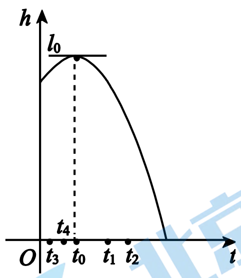
（11）$3!=$___.

（12）若甲、乙、丙、丁 4 人站成一排，甲不站两端，则不同排法的种数为___.

（13）已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$．则 $f'(1)=$___；若 $g(x)=f(2x)$，则 $g'(x)=$___.

（14）设函数 $f(x)=ax+\ln x$．能说明“对于任意的 $0<x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立”为假命题的一个实数 a 的值可以是___.

（15）某高台跳水运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h（单位：m）与跳起后的时间 t（单位：s）存在函数关系 $h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$，$h(t)$ 的图象如图所示，已知曲线 $h(t)$ 在 $t=t_0$ 处的切线 l_0 平行于 t 轴，根据图象，给出下列四个结论：



①在 $t=t_0$ 时高度 h 关于时间 t 的瞬时变化率为 0；

②曲线 $h(t)$ 在 $t=t_2$ 附近比在 $t=t_1$ 附近下降得慢；

③曲线 $h(t)$ 在 $t=t_3$ 附近比在 $t=t_4$ 附近上升得快；

④设在 $t=t_2$ 和 $t=t_4$ 时该运动员的瞬时速度分别为 v_2 m/s 和 v_4 m/s，则 $|v_2|>|v_4|$．

其中所有正确结论的序号是___.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3x$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最大值与最小值.

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{x+1}$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）比较 $f(-3)$，$f(-2)$，$f(0)$ 的大小，并画出 $f(x)$ 的大致图象；

（Ⅱ）若关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有实数解，直接写出实数 m 的取值范围.

（18）（本小题 14 分）

某校举办乒乓球团体比赛，该比赛采用 5 场 3 胜制，每场均为单打，若某队先胜 3 场，则比赛结束，要求每队派 3 名运动员参赛，每名参赛运动员在团体赛中至多参加 2 场比赛，前 3 场比赛每名运动员各出场 1 次，若 3 场不能决出胜负，则由第 1 位或第 2 位出场的运动员参加后续的比赛.

（Ⅰ）若某队从 5 名运动员中选 3 名参加此团体赛，求该队前 3 场比赛有几种出场情况；

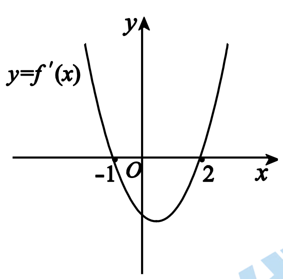
（Ⅱ）已知某队派甲、乙、丙这 3 名运动员参加此团体赛.

①若 3 场决出胜负，列出该队所有可能出场情况；

②若 4 场或 5 场决出胜负，求该队共有几种出场情况.

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+bx+c$（$a,b,c\in\mathbf{R}$）.



（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示.

① 直接写出 $f(x)$ 的单调区间，并求 a,b 的值；

② 若 $f(x)$ 有且只有 1 个零点，直接写出 c 的取值范围；

（Ⅱ）当 $b=-2a^2$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x-x-1$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)$，求证：当 $x\in[0,\pi)$ 时，$g(x)\leqslant 0$；

（Ⅲ）对任意的 $m,n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，判断 $f(m+n)-f(m)$ 与 $f(n)$ 的大小关系，并证明结论.

（21）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y=2x+m$，求 x_0,m 的值；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=1+x\ln x$，证明：$g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 的图象的上方.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	B	B	A	C	B	C	D	A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）6　　　（12）12　　　（13）0；$\dfrac{e^{2x}(2x-1)}{2x^2}$

（14）-1（答案不唯一，只要满足 $a<0$ 即可）　（15）①③④

注：第（13）题第一空 3 分，第二空 2 分。

第（15）题只写一个且正确给 3 分，只写两个且正确给 4 分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．……1 分

$f'(x)=3x^2-3$．……1 分

令 $f'(x)=0$，即 $3x^2-3=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=1$．……2 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的情况如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$，

单调递减区间为 $(-1,1)$．　……3 分

（Ⅱ）$f(-1)=2$，$f(3)=18$，$f(1)=-2$ ……3 分

由（Ⅰ）知，$f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最小值为 $f(1)=-2$，……2 分

最大值为 $f(3)=18$．……2 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$．

$f'(x)=x'e^{x+1}+x(e^{x+1})'=e^{x+1}+xe^{x+1}=e^{x+1}(x+1)$．……1 分

令 $f'(x)=0$，即 $e^{x+1}(x+1)=0$，

因为 $e^{x+1}>0$，所以解得 $x=-1$．……1分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 的情况如下：……2分

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+

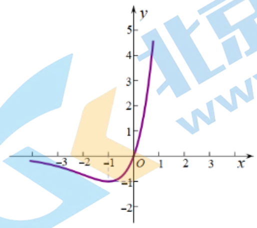
$f(x)$	单调递减	$f(-1)$	单调递增

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极小值 $f(-1)=-1$．……2 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减．

故 $f(-3)>f(-2)$．……1 分

又因为当 $x<0$ 时，$e^{x+1}>0$．



故 $xe^{x+1}<0$．

所以 $0>f(-3)>f(-2)$．

因为 $f(0)=0\times e^1=0$，……1 分

所以 $f(-2)<f(-3)<f(0)$．……1 分

大致图像如图所示．……3 分

（Ⅲ）当 $m\geqslant -1$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有实根．……2 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）根据题意，该球队前 3 场比赛有 $A_5^3=5\times4\times3=60$ 种出场情况．……3 分

（Ⅱ）①因为 3 场决出胜负，

所以该球队所有可能出场情况如下：

甲、乙、丙；甲、丙、乙；

乙、甲、丙；乙、丙、甲；

丙、甲、乙；丙、乙、甲．……6分

②由①知，前 3 场共有 6 种出场情况．

所以 4 场决出胜负时，该球队共有 $6\times2=12$ 种出场情况．……2分

且 5 场决出胜负时，该球队共有 $6\times2=12$ 种出场情况．……2分

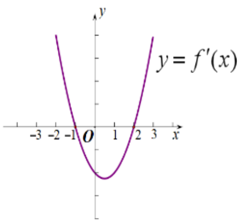
所以 4 场或 5 场决出胜负时，该球队共有 $12+12=24$ 种出场情况．……1分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）①由 $y=f'(x)$ 图象知，

$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(2,+\infty)$，……2 分

单调递减区间为 $(-1,2)$．……1 分



因为 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+c$，

所以 $f'(x)=x^2+ax+b$．

由图知 $f'(-1)=0$，$f'(2)=0$．……2 分

即 $\begin{cases}1-a+b=0,\\4+2a+b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=-2.\end{cases}$ ……2 分

② $(-\infty,-\frac{7}{6})\cup(\frac{10}{3},+\infty)$．……3 分

（Ⅱ）当 $b=-2a^2$ 时，$f'(x)=x^2+ax-2a^2=(x+2a)(x-a)$． ……1 分

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增． ……1 分

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-2a)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

在区间 $(-2a,a)$ 上单调递减． ……1 分

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,a)$ 和 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增，

在区间 $(a,-2a)$ 上单调递减． ……1 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=e^x\cos x-x-1$，

得 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$． ……1 分

因为 $f(0)=0$， ……1 分

$f'(0)=0$． ……1 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$． ……1 分

（Ⅱ）依题意，$g(x)=f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)-1$．

所以 $g'(x)=-2e^x\sin x$． ……1 分

当 $x\in[0,\pi)$ 时，$e^x>0,\sin x\geqslant 0$， ……1 分

所以 $g'(x)\leqslant 0$． ……1分

所以函数 $g(x)$ 在区间 $[0,\pi)$ 上单调递减． ……1 分

因为 $g(0)=0$，

所以当 $x\in[0,\pi)$ 时，$g(x)\leqslant g(0)=0$． ……1 分

（Ⅲ）不妨假设 $n\in(0,\frac{\pi}{2})$ 取定，令 $h(x)=f(x+n)-f(x)-f(n)$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，1 分

则 $h'(x)=f'(x+n)-f'(x)$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，$x+n\in(0,\pi)$． ……1 分

由（Ⅱ）知，$g(x)=f'(x)$ 在区间 $[0,\pi)$ 上单调递减，

因为 $0\leqslant x<x+n<\pi$，所以 $h'(x)=f'(x+n)-f'(x)<0$． ……1 分

从而 $h(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减． ……1 分

因为 $h(0)=-f(0)=0$， ……1 分

所以当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$h(x)<h(0)=0$，即 $f(x+n)-f(x)-f(n)<0$．

综上，对任意的 $m,n\in(0,\frac{\pi}{2})$，有 $f(m+n)-f(m)<f(n)$． ……1 分

（21）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=x-\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$． ……1 分

依题设，$1+\dfrac{1}{{x_0}^2}=2$，$x_0-\dfrac{1}{x_0}=2x_0+m$，且 $x_0>0$． ……2 分

解得 $x_0=1$，$m=-2$． ……2 分

（Ⅱ） 令 $h(x)=1+x\ln x-x+\dfrac{1}{x}$，$x>0$

证明 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的上方，

等价于证明对任意的 $x>0$，$h(x)>0$ 恒成立， ……1 分

等价于证明当 $x>0$，$h(x)$ 的最小值大于零．

因为 $h'(x)=\ln x-\dfrac{1}{x^2}$，$x>0$， ……1 分

所以 $h''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}$，

且当 $x>0$ 时，$h''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}>0$．

故 $h'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增． ……1 分

因为 $h'(1)=-1<0$，$h'(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}>0$，

所以 $h'(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上存在唯一零点 x_0，

所以 $\ln x_0-\dfrac{1}{{x_0}^2}=0$，即 $\ln x_0=\dfrac{1}{{x_0}^2}$． ……1 分

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增． …1 分

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)$． ……1 分

因为 $h(x_0)=1+x_0\ln x_0-x_0+\dfrac{1}{x_0}$，且 $\ln x_0=\dfrac{1}{{x_0}^2}$，

所以 $h(x_0)=1-x_0+\dfrac{2}{x_0}=\dfrac{-{x_0}^2+x_0+2}{x_0}=\dfrac{-(x_0-2)(x_0+1)}{x_0}$．

因为 $x_0\in(1,\sqrt{e})$，所以 $-(x_0-2)(x_0+1)>0$．

故 $h(x_0)=\dfrac{-(x_0-2)(x_0+1)}{x_0}>0$． ……1 分

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)>0$． ……1 分

故对任意的 $x>0$，$h(x)>0$ 恒成立，

即 $g(x)$ 的图象在 $f(x)$ 图象的上方． ……1 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承〞精益求精、专业严谨〞的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。