中国人民大学附属中学2020届高三12月月考
数学参考答案和评分标准

2019.12.09

一、选择题（共10个小题，每小题4分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	C	C	B	A	B	B	B	D

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分．请把结果填在答题纸中．）

题号	11	12	13	14	15	16	
答案	$(1,0)$	$3\cos(2x+\frac{\pi}{6})$	$\sqrt{5}$	$[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$	1.5	4	155

(注：16题第一个空3分，第二个2分)

三、解答题（本大题共6道小题，共80分．解答题应写出文字说明、演算步骤或证明过程．）

17．（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\frac{1}{2}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 2x)+\frac{\sqrt{3}}{4}$．

……………………4分

即 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$．　　……………………6分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$．　　……………………7分

（Ⅱ）由 $x_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$，得 $2x_0-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，　　……………………8分

又因为 $f(x_0)=\frac{1}{2}\sin(2x_0-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，

所以 $2x_0-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $2x_0=\frac{5\pi}{6}$．　　……………………11分

所以 $f(2x_0)=f(\frac{5\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin(2\cdot\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$．……………………13分

18. （本小题满分 13 分）

解：（I）$\because \sqrt{3}b\cos A=\sin A(a\cos C+c\cos A)$，

$\therefore$由正弦定理可得：

$\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\sin A\sin(A+C)=\sin A\sin B$，

……………………2 分

即 $\sqrt{3}\sin B\cos A=\sin A\sin B$，

$\because \sin B\neq 0$，……………………3 分

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，……………………4 分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．……………………6 分

（II）$\because A=\dfrac{\pi}{3}$，$a=2\sqrt{3}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$，……………………7 分

$\therefore bc=5$，……………………8 分

$\therefore$由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $12=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc=(b+c)^2-15$，

解得：$b+c=3\sqrt{3}$，……………………12 分

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$．……………………13 分

19. （本小题满分 13 分）

解：解：（I）由 A 餐厅分数的频率分布直方图，得

对 A 餐厅评分低于 30 的频率为 $(0.003+0.005+0.012)\times 10=0.2$，………… 2 分

所以，对 A 餐厅评分低于 30 的人数为 $100\times 0.2=20$．……………………3 分

（II）设 “恰有 1 人评分在 $[0,10)$ 范围内” 为事件 X ……………………4 分

对 B 餐厅评分在 $[0,10)$ 范围内的有 2 人，在 $[10,20)$ 范围内的有 3 人，

所以评分在 $[0,20)$ 范围内的人共有 5 人，

从这 5 人中随机选出 2 人的选法共 $C_5^2=10$ 种．…………7 分

恰有1人评分在[0,10)范围内的选法为：$C_2^1 \cdot C_3^1 = 6$. …………9分

则$P(X)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

故2人中恰有1人评分在[0,10)范围内的概率为 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …………10分

（III）从两个餐厅得分低于30分的人数所占的比例来看：

由（I）得，抽样的100人中，A餐厅评分低于30的人数为 20，

所以，A餐厅得分低于30分的人数所占的比例为20%.

或B餐厅评分低于30的人数为 $2+3+5=10$，

所以，B餐厅得分低于30分的人数所占的比例为10%.

所以会选择B餐厅用餐. ……………………………13分

注：本题答案不唯一，必须结合题中数据给出理由，只要言之合理即可给分.

20.（本小题满分14分）

解：

（I） $f'(x)=6x^2-12x$， ……………………2分

则 $6x^2-12x=-6$，所以 $x=1$，

当 $x=1$， $y=-3$，所以 $-3=6\times1+m$，

解得 $m=3$. ……………………4分

（II） 因为 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R},x\in(0,+\infty))$，

所以由 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)=0$，得到 $x_1=0$， $x_2=\frac{a}{3}$，

当 $a\le0$ 时， $f'(x)=2x(3x-a)>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

即函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0,1)$，即 $f(0)=1>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内没有零点，不合题意， ……………………5分

当 $a>0$ 时，$x\in(0,+\infty)$时

x	$(0,\frac{a}{3})$	$\frac{a}{3}$	$(\frac{a}{3},+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘		↗

即函数 $f(x)$ 在区间在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减， $\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

又$f(x)$过点 $(0,1)$，要使函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f\left(\frac{a}{3}\right)=0$，

即 $\frac{2a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+1=0$ ，解得 $a=3$ ，

综上可得函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点时 $a=3$ ，…………7 分

此时函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ ，$(1,+\infty)$

单调递减区间为 $(0,1)$ ．…………………………8 分

（III）当 $a>0$ 时，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ ，$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减，

此时函数 $f(x)$ 有两个极值点，极大值为 $f(0)=1$ ，极小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=1-\frac{a^3}{27}$ ，

且 $f(-1)=-a-1$ ，$f(1)=3-a$ ．…………………………10 分

①当 $\frac{a}{3}\geq 1$ ，即 $a\geq 3$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 0,1 上单调递减，

$f(x)_{\max}=f(0)=1$ ，

又 $f(-1)=-1-a$ ，$f(1)=3-a$ ，即 $f(-1)<f(1)$ ，$f(x)_{\min}=-1-a$ ，

所以 $1+(-1-a)=1$ ，解 $a=-1$ （舍）．……………………………12 分

②当 $\frac{a}{3}<1$ 即 $0<a<3$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减，在 $(\frac{a}{3},1)$ 上单调递增，

$f(-1)=-1-a<0$ ，即 $f\left(\frac{a}{3}\right)=1-\frac{a^3}{27}>0$ ，所以 $f(x)_{\min}=-1-a$ ．

若 $f(0)-f(1)=a-2\geq 0$ ，即 $2\leq a<3$ 时，$f(x)_{\max}=f(0)=1$ ，所以 $1+(-1-a)=1$ ，

解得 $a=-1$ （舍）．

若 $f(0)-f(1)=a-2<0$ ，即 $0<a<2$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=3-a$ ，所以 $(3-a)+(-1-a)=1$ ，

解得 $a=\frac{1}{2}$ ．

综上 $a=\frac{1}{2}$ ．……………………………14 分

21.（本小题满分 14 分）

解：（I）由已知得：$\begin{cases} c=\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}b\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ，$b=1$ ，$a=2$，

所以，椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.··················4 分

（II）

解法一：设 $P(m,-2)$，且 $m\neq 0$，则直线 PM 的斜率为 $k=\frac{-1-(-2)}{0-m}=-\frac{1}{m}$,

则直线 PM 的方程为 $y=-\frac{1}{m}x-1$，······························5 分

联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{m}x-1, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 化简得 $\left(1+\frac{4}{m^2}\right)x^2+\frac{8}{m}x=0$，························6 分

解得 $M\left(-\frac{8m}{m^2+4},\frac{4-m^2}{m^2+4}\right)$，························8 分

所以$\overrightarrow{PB}=(-m,3)$，$\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{8m}{m^2+4}-m,\frac{4-m^2}{m^2+4}+2\right)=\left(\frac{-m^3-12m}{m^2+4},\frac{m^2+12}{m^2+4}\right)$，

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=(-m,3)\cdot\left(\frac{-m^3-12m}{m^2+4},\frac{m^2+12}{m^2+4}\right)=\frac{m^4+15m^2+36}{m^2+4}$，························11 分

令 $m^2+4=t>4$，故 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=\frac{(t-4)^2+15(t-4)+36}{t}=\frac{t^2+7t-8}{t}=t-\frac{8}{t}+7$，

因为 $y=t-\frac{8}{t}+7$ 在 $t\in(4,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=t-\frac{8}{t}+7>4-\frac{8}{4}+7=9$，即 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}$ 的取值范围为 $(9,+\infty)$.

······························14 分

解法二：设点 $M(x_0,y_0)(x0\neq 0)$，即直线 PM 的方程为 $y=\frac{y_0+1}{x_0}x-1$，·········5 分

令 $y=-2$，得 $P\left(-\frac{x_0}{y_0+1},-2\right)$.

所以$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{x_0}{y_0+1},3\right)$，$\overrightarrow{PM}=\left(x_0+\frac{x_0}{y_0+1},y_0+2\right)$，························8 分

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=\frac{x_0}{y_0+1}\left(x_0+\frac{x_0}{y_0+1}\right)+3(y_0+2)=\frac{x_0^2(y_0+2)}{(y_0+1)^2}+3(y_0+2)=\frac{4(1-y_0^2)(y_0+2)}{(y_0+1)^2}+3(y_0+2)=\frac{(7-y_0)(y_0+2)}{y_0+1}$.························11 分

令 $t=y_0+1\in(0,2)$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=\frac{(8-t)(t+1)}{t}=-t+\frac{8}{t}+7$，

因为 $y=-t+\frac{8}{t}+7$ 在 $t\in(0,2)$ 上单调递减，

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}=-t+\frac{8}{t}+7>-2+\frac{8}{2}+7=9$，即 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PM}$ 的取值范围为 $(9,+\infty)$.

························14 分

22. （本小题满分 13 分）

解:

（Ⅰ）$n\ge 2$ 时，由 $b_{n+1}b_{n-1}=b_n$ ①，得到：$b_{n+2}b_n=b_{n+1}$，代入①得：$b_{n+2}=\dfrac{1}{b_{n-1}}$，

即 $b_{n+3}=\dfrac{1}{b_n},(n\in N^*)$，从而有 $b_{n+6}=\dfrac{1}{b_{n+3}}=b_n,(n\in N^*)$

所以 $\{b_n\}$ 是周期为 6 的周期数列，…………………3 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知：$\{b_n\}$ 是周期为 6 的周期数列

因为对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $b_1=1,b_2=2,b_3=2,b_4=1,b_5=\dfrac{1}{2},b_6=\dfrac{1}{2}$，　　…………………4 分

所以 $c_{n+1}-c_n=a_{6n+5}-a_{6n-1}$

$=(a_{6n+5}-a_{6n+4})+(a_{6n+4}-a_{6n+3})+(a_{6n+3}-a_{6n+2})+(a_{6n+2}-a_{6n+1})+(a_{6n+1}-a_{6n})+(a_{6n}-a_{6n-1})$

$=b_{6n+4}+b_{6n+3}+b_{6n+2}+b_{6n+1}+b_{6n}+b_{6n-1}$　　……………………6 分

$=1+2+2+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=7\ (n\ge 1)$，

所以数列 $\{c_n\}$ 为等差数列.　　…………………………7 分

（Ⅲ）设 $c_n=a_{6n+i}(n\ge 0)$，（其中 i 为常数且 $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$），所以

$c_{n+1}-c_n=a_{6n+6+i}-a_{6n+i}=b_{6n+i}+b_{6n+i+1}+b_{6n+i+2}+b_{6n+i+3}+b_{6n+i+4}+b_{6n+i+5}=7(n\ge 0)$

所以数列 $\{a_{6n+i}\}$ 均为以 7 为公差的等差数列.　　…………………………9 分

设 $f_k=\dfrac{a_{6k+i}}{6k+i}=\dfrac{a_i+7k}{i+6k}=\dfrac{\frac{7}{6}(i+6k)+a_i-\frac{7i}{6}}{i+6k}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{a_i-\frac{7i}{6}}{i+6k}$，　…………………10 分

（其中 $n=6k+i\ (k\ge 0)$，i 为 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 中的一个常数），

当 $a_i=\dfrac{7i}{6}$ 时，对任意的 $n=6k+i$ 有 $\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{7}{6}$；

当 $a_i\ne\dfrac{7i}{6}$ 时，

$$f_{k+1}-f_k=\frac{a_i-\frac{7i}{6}}{6(k+1)+i}-\frac{a_i-\frac{7i}{6}}{6k+i}=(a_i-\frac{7i}{6})(\frac{1}{6(k+1)+i}-\frac{1}{6k+i})$$

$$=(a_i-\frac{7i}{6})(\frac{-6}{[6(k+1)+i](6k+i)})$$

①若 $a_i>\dfrac{7i}{6}$，则对任意的 $k\in\mathbf{N}$ 有 $f_{k+1}<f_k$，所以数列 $\{\dfrac{a_{6k+i}}{6k+i}\}$ 为单调减数列；

②若 $a_i<\dfrac{7i}{6}$，则对任意的 $k\in\mathbf{N}$ 有 $f_{k+1}>f_k$，所以数列 $\{\dfrac{a_{6k+i}}{6k+i}\}$ 为单调增数列；

…………………………12 分

综上：设集合 $B=\{\frac{7}{6}\}\cup\{\frac{4}{3}\}\cup\{\frac{1}{2}\}\cup\{-\frac{1}{3}\}\cup\{-\frac{1}{6}\}\cup\{\frac{1}{2}\}=\{\frac{7}{6},\frac{4}{3},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}\}$，

当 $a_1\in B$ 时，数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 中必有某数重复出现无数次.

当 $a_1\notin B$ 时，$\{\frac{a_{6k+i}}{6k+i}\}$ $(i=1,2,3,4,5,6)$ 均为单调数列，任意一个数在这 6 个数列中最多出现一次，所以数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 中任意一项的值均未在该数列中重复出现无数次. ················13 分