2023 北京育才学校高一（上）期中

数　学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x|-3<x<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $(0,1)$　　B. $\{0,1\}$　　C. $(0,2)$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2-x+3>0$”的否定为（　）

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-x+3\le 0$　　B. $\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $x^2-x+3>0$

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2-x+3\le 0$　　D. $\exists x\notin\mathbf{R}$，使得 $x^2-x+3\le 0$

3. 下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $y=-x^2$　　B. $y=\sqrt{x}$　　C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=x^3$

4. 如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　）

A. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　B. $a^2<b^2$　　C. $\dfrac{a}{b}<1$　　D. $ab>b^2$

5. 已知 $x>0$，则 $x-4+\dfrac{4}{x}$ 的最小值为（　）

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. $2\sqrt{2}$

6. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2)=0$，且在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，则不等式 $f(x)<0$ 的解集为（　）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(0,2)$

7. 已知函数 $f(x)=(x+1)^2-\dfrac{6}{x}$，则下列区间中含有 $f(x)$ 的零点的是（　）

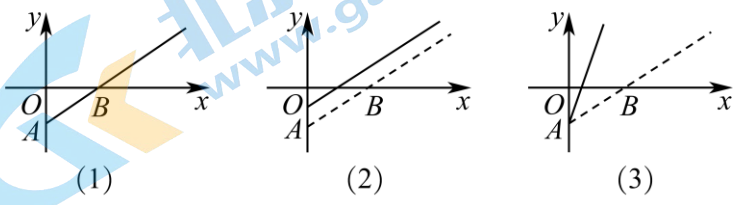
A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

8. 已知函数 $f(x)=x^2-2ax$，则“$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 某部影片的盈利额（即影片的票房收入与固定成本之差）记为 y，观影人数记为 x，其函数图象如图（1）所示.由于目前该片盈利未达到预期，相关人员提出了两种调整方案，图（2）、图（3）中的实线分别为调整后 y 与 x 的函数图象.



给出下列四种说法：

①图（2）对应的方案是：提高票价，并提高成本；

②图（2）对应的方案是：保持票价不变，并降低成本；

③图（3）对应的方案是：提高票价，并保持成本不变；

④图（3）对应的方案是：提高票价，并降低成本.

其中，正确的说法是（　）

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

10. 已知方程组 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$ 的解集为 $A=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\}$，且 $|x_1-x_2|=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$，则 $k=$（　）

A. 1 或 -1　　B. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$　　C. $\frac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$　　D. 2 或 -2

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 的定义域是__________.

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=2x-1$，则 $f(-2)=$__________.

13. 已知函数 $f(x)$ 同时满足以下条件：

①定义域为 R；②值域为 $[1,+\infty)$；③ $\forall x\in R$，都有 $f(x)=f(-x)$.

试写出一个函数解析式 $f(x)=$__________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & x>0 \\ x^2+2x, & x\le 0 \end{cases}$，那么 $f(f(-3))=$__________；当方程 $f(x)=a$ 有且仅有 3 个不同的根时，实数 a 的取值范围是__________.

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $f(x)$ 满足：“$\forall x_1\in D$，都存在 $x_2\in D$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=0$”则称函数 $f(x)$ 具有性质 τ，给出下列四个结论：

①函数 $f(x)=x$ 具有性质 τ；

②所有奇函数都具有性质 τ；

③若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 都具有性质 τ，则函数 $f(x)+g(x)$ 也具有性质 τ；

④若函数 $f(x)=x^2+a$，$x\in[-2,1]$ 具有性质 τ，则 $a=-2$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题（本大原共 6 小题，共 85 分）

16. 已知集合 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x|x-4a\le 0\}$..

（1）求 A，$\complement_U A$；

（2）当 $a=0$ 时，$A\cup B$；

（3）若 $A\cup B=\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

17. 求下列关于 x 的不等式或不等式组的解集.

（1）$\dfrac{x-1}{x+2}<0$

（2）$\begin{cases}|2x-1|<5\\ x-1\geq 0\end{cases}$

（3）$x^2-3ax+2a^2\leq 0(a\in \mathrm{R})$

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论；

（2）定义证明函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是增函数；

（3）写出函数 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上的单调性（结论不要求证明）.

19. 函数 $f(x)=x^2-2ax+1$，其中 $a\in \mathrm{R}$.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在区间 $x\in[-2,3]$ 上的值域；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个正数零点 x_1，$x_2\left(x_1<x_2\right)$，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）求 $4x_1+x_2$ 的最小值以及取到最小值时 a 的值.

20. 小华在某市场独家经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 1 吨该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 1 吨亏损 300 元.小华为下一个销售季度购进了 130 吨该农产品.以 x（单位：吨，$100\leq x\leq 150$）表示下一个销售季度内，该市场该农产品需求量.y（单位：元）表示下一个销售季度内小华销售该农产品的利润.

（1）分别求当 $x=120$ 时，y 的值；当 $x=140$ 时，y 的值；

（2）将 y 表示为 x 的函数；

（3）求出下一个销售季度利润 y 不少于 57000 元时，市场需求量 x 的范围.

21. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，若 $y=\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则称 $f(x)$ 为"一阶比增函数".

（1）若 $f(x)=ax^2+ax$ 是"一阶比增函数"，求实数 a 的取值范围；

（2）若 $f(x)$ 是"一阶比增函数"，求证：$\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)<f\left(x_1+x_2\right)$；

（3）若 $f(x)$ 是"一阶比增函数"，且 $f(x)$ 有零点，求证：$f(x)>2023$ 有解.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.【答案】B

【分析】应用集合的交运算求集合即可.

【详解】$A\cap B=\{0,1,2,3,4\}\cap\{x|-3<x<2\}=\{0,1\}$.

故选：B

2.【答案】A

【分析】根据全称命题的否定表示方法选出答案即可.

【详解】命题"$\forall x\in R$，都有 $x^2-x+3>0$"的否定为：

"$\exists x\in R$，使得 $x^2-x+3\le 0$"，所以选项 A 正确.

故选：A.

3.【答案】C

【分析】逐一判断选项中函数的奇偶性和单调性，即可得答案.

【详解】A．函数 $y=-x^2$ 为偶函数，不满足条件.

B．函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0，+\infty)$，定义域不对称，为非奇非偶函数，不满足条件.

C．函数 $y=\frac{1}{x}$ 为奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，满足条件.

D．函数 $y=x^3$ 为奇函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不满足条件.

故选：C.

4.【答案】D

【分析】根据不等式的性质即可逐一判断.

【详解】由 $a<b<0$ 可得：$0>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$a^2\text{-}b^2=(a+b)(a-b)>0\Rightarrow a^2>b^2,\frac{a}{b}>1$，故 A，B，C 错误，$ab-b^2=b(a-b)>0\Rightarrow ab>b^2$，故 D 正确.

故选：D

5.【答案】B

【分析】由基本不等式求得最小值.

【详解】$\because x>0$，$\therefore x+\frac{4}{x}-4\ge 2\sqrt{x\times\frac{4}{x}}-4=0$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$ 即 $x=2$ 时等号成立.

故选：B.

6.【答案】C

【分析】根据偶函数的性质得到 $f(-2)=0$，$[0,+\infty)$ 单调递增，然后根据单调性解不等式即可.

【详解】因为 $f(x)$ 为偶函数，$f(2)=0$，$(-\infty,0]$ 单调递减，

所以 $f(-2)=0$，$[0,+\infty)$ 单调递增，

所以不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $(-2,2)$.

故选：C.

7.【答案】B

【分析】先判断 $f(x)=(x+1)^2-\dfrac{6}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，再根据零点存在性定理求解即可.

【详解】因为函数 $y=(x+1)^2, y=-\dfrac{6}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都递增，

所以 $f(x)=(x+1)^2-\dfrac{6}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，

又因为 $f(0)<f(1)=(1+1)^2-\dfrac{6}{1}=-2<0$，

$f(4)>f(3)>f(2)=(2+1)^2-\dfrac{6}{2}=6>0$，

所以 $f(1)f(2)<0$，所以区间 $(1,2)$ 含有 $f(x)$ 的零点，

故选：B.

8.【答案】A

【分析】

先由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求出 a 的取值范围，再根据充分条件，必要条件的定义即可判断.

【详解】解：$\because f(x)=x^2-2ax$ 的对称轴为：$x=-\dfrac{-2a}{2}=a$，

若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $a\le 0$，

即 $a<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

反之，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$a\le 0$，

故 “$a<0$”是“函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的充分不必要条件.

故选：A.

9.【答案】C

【分析】根据图象可知盈利额 y 与观影人数 x 成一次函数关系，再分别根据(2)和(3)的图象进行分析即可得出答案.

【详解】由图象(1)可设盈利额 y 与观影人数 x 的函数为 $y=kx+b$，

显然 $k>0$，$b<0$，k 为票价.

当 $k=0$ 时，$y=b$，则 $-b$ 为固定成本.

由图象(2)知，直线向上平移，

k 不变，即票价不变，

b 变大，且 $b<0$，则 $-b$ 变小，成本减小.

故①错误，②正确；

由图象(3)知，直线与 y 轴的交点不变，直线斜率变大.

k 变大，即提高票价，b 不变，则 $-b$ 不变，成本不变.

故③正确，④错误.

故选：C.

10.【答案】B

【分析】由方程组可得 $(1+2k^2)x^2+4kx-2=0$，应用韦达定理有 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{2}{1+2k^2}$，

再由 $|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$ 列方程求参数值即可.

【详解】由题设 $x^2+2(kx+1)^2=4$，则 $(1+2k^2)x^2+4kx-2=0$，且 $\Delta=16k^2+8(1+2k^2)>0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{4k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{2}{1+2k^2}$，

而 $|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\dfrac{72}{25}$，即 $(-\dfrac{4k}{1+2k^2})^2+\dfrac{8}{1+2k^2}=\dfrac{72}{25}$，

整理得 $\dfrac{4k^2+1}{4k^4+4k^2+1}=\dfrac{9}{25}\Rightarrow 9k^4-16k^2-4=(9k^2+2)(k^2-2)=0$，可得 $k=\pm\sqrt{2}$.

故选：B

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】$[1,+\infty)$

【分析】根据偶次方根的被开方数非负得到不等式，解得即可；

【详解】解：因为 $f(x)=\sqrt{x-1}$，所以 $x-1\geq 0$，解得 $x\geq 1$，即函数的定义域为 $[1,+\infty)$

故答案为：$[1,+\infty)$

12.【答案】-3

【分析】利用奇函数性质有 $f(-2)=-f(2)$，结合已知解析式求函数值即可.

【详解】由题设 $f(-2)=-f(2)=-(2\times 2-1)=-3$.

故答案为：-3

13.【答案】x^2+1（答案不唯一）

【分析】根据题设写出一个定义域为 R，值域为 $[1,+\infty)$ 的偶函数即可.

【详解】由题设，$f(x)$ 是定义域为 R，值域为 $[1,+\infty)$ 的偶函数，

所以 $f(x)=x^2+1$ 满足.

故答案为：x^2+1（答案不唯一）

14.【答案】 ①. 2 ②. $[0,1)$

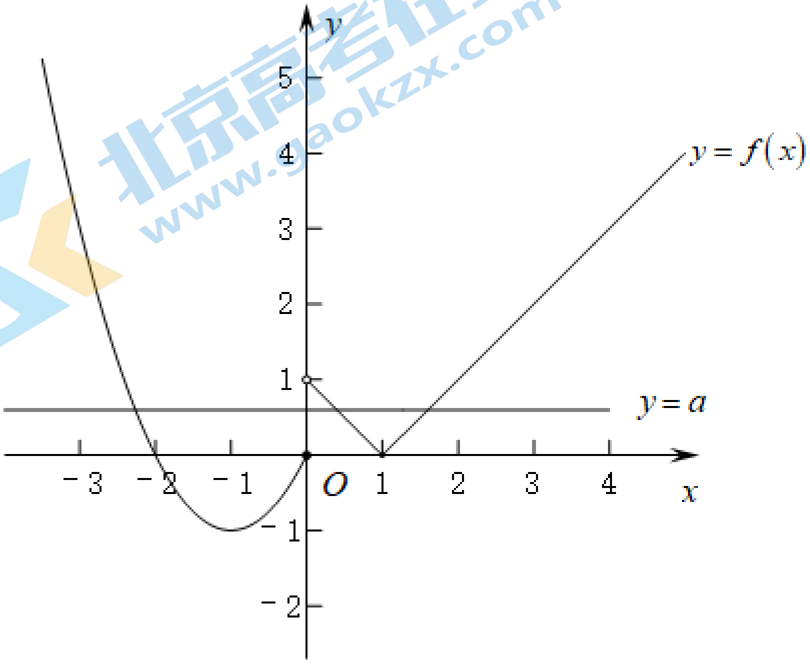
【分析】入解析式即可求出 $f(f(-3))$；方程 $f(x)=a$ 有且仅有 3 个不同的根即 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有 3 个交点，结合 $y=f(x)$ 图象，即可得出答案.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\begin{cases}|x-1|, & x>0\\ x^2+2x, & x\le 0\end{cases}$，

所以 $f\left(-3\right)=\left(-3\right)^2-6=3$，

所以 $f(f(-3))=f\left(3\right)=2$；

画出函数 $f\left(x\right)$ 的图象，



方程 $f(x)=a$ 有且仅有 3 个不同的根即 $y=f(x)$ 与 $y=a$ 的图象有 3 个交点，

由图可得：$0\le a<1$.

故答案为：2；$[0,1)$.

15.【答案】①②④

【分析】根据函数具有性质 τ，知函数的值域关于原点对称，从而依次判断得结论.

【详解】由题知，若 $f(x)$ 满足性质 τ 即：“$\forall x_1\in D$，都存在 $x_2\in D$，使得 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=0$”

则 $f(x)$ 的值域关于原点对称.

对于①，函数 $f(x)=x$，值域为R 关于原点对称，显然具有性质 τ，故正确；

对于②，因为所有的奇函数对应定义域内任意 x 的都有 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，

则值域关于原点对称，显然具有性质 τ，故正确；

对于③，设 $f(x)=x^2-1$，$x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$，值域为 $[-1,1]$，具有性质 τ，

$g(x)=-\sqrt{2}x+1$，$x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$，值域为$\left[-1,1\right]$，具有性质$\tau$，

$f(x)+g(x)=x^2-\sqrt{2}x$，$x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$，值域为$\left[-\frac{1}{2},0\right]$，不具有性质$\tau$，故错误；

对于④，若函数$f(x)=x^2+a$，$x\in[-2,1]$具有性质τ，则$f(x)$的值域关于原点对称.

又 $f(x)=x^2+a$，$x\in[-2,1]$时，$f(x)$的值域为$[a,4+a]$，

则$a+4+a=0$，解得$a=-2$，故正确.

故答案为:①②④.

三、解答题（本大原共 6 小题，共 85 分）

16.【答案】(1) $A=\{x\,|\,x<-1或x>3\}$，$\complement_U A=\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$；

(2) $A\cup B=\{x\,|\,x\le 0或x>3\}$；

(3) $a\ge\frac{3}{4}$.

【分析】(1) 解一元二次不等式求集合A，再由补运算求$\complement_U A$；

(2) 由题设得$B=\{x\,|\,x\le 0\}$，应用并运算求$A\cup B$；

(3) 根据并集的结果及集合A、B有$4a\ge 3$，即可求参数范围.

【小问 1 详解】

由$A=\left\{x\middle|(x+1)(x-3)>0\right\}=\{x\,|\,x<-1或x>3\}$，

所以$\complement_U A=\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$.

【小问 2 详解】

由题设$B=\left\{x\middle|x\le 4a\right\}=\{x\,|\,x\le 0\}$，

所以$A\cup B=\{x\,|\,x\le 0或x>3\}$.

【小问 3 详解】

由(1)(2)且$A\cup B=\mathbf{R}$，则$4a\ge 3$，即$a\ge\frac{3}{4}$.

17.【答案】(1) $\left\{x\,|\,-2<x<1\right\}$

(2) $\left\{x\,|\,1\le x<3\right\}$

(3) 答案见解析

【分析】(1) 转化为一元二次不等式求解即可；

(2) 分别求解两个不等式，再求交集即可；

(3 分三种情况讨论，分别求解一元二次不等式即可.

【小问 1 详解】

$\frac{x-1}{x+2}<0$等价于$(x-1)(x+2)<0$，解得$-2<x<1$，

$\frac{x-1}{x+2}<0$的解集为$\{x|-2<x<1\}$；

【小问 2 详解】

由$|2x-1|<5$可得$-5<2x-1<5 \Rightarrow -2<x<3$，由$x-1\geq 0$可得$x\geq 1$，

综上，$1\leq x<3$，不等式组的解集为$\{x|1\leq x<3\}$

【小问 3 详解】

由$x^2-3ax+2a^2\leq 0$可得$(x-a)(x-2a)\leq 0$，

当$a<0$时，$2a<x<a$；当$a=0$时，$x=0$；当$a>0$时，$a<x<2a$；

综上，当$a<0$时，不等式的解集为$\{x|2a<x<a\}$；

当$a=0$时，不等式的解集为$\{0\}$；

当$a>0$时，不等式的解集为$\{x|a<x<2a\}$；

18. 【答案】（1）奇函数，证明见解析

（2）证明见解析　（3）单调递增

【分析】（1）根据奇偶性的定义判断并证明；

（2）根据单调性的定义证明；

（3）根据奇函数的性质判断.

【小问 1 详解】

$f(x)$为奇函数，证明如下：

$f(x)$的定义域为 R，关于原点对称，

$f(-x)=\frac{-x}{x^2+4}=-f(x)$，

所以$f(x)$为奇函数.

【小问 2 详解】

令$0<x_1<x_2<2$，

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{x_2^2+4}-\frac{x_1}{x_1^2+4}=\frac{(x_2-x_1)(4-x_1x_2)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$，

因为$0<x_1<x_2<2$，所以$x_2-x_1>0$，$4-x_1x_2>0$，

所以$f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_2)>f(x_1)$，

所以$f(x)$在$(0,2)$上是增函数.

【小问 3 详解】

$f(x)$在$(-2,0)$上单调递增.

19.【答案】(1)$[0,9]$；

(2)(i) $a>1$，(ii) $a=\dfrac{5}{4}$时$4x_1+x_2$的最小值为4.

【分析】(1)根据二次函数性质求$f(x)$在已知区间上的最值，即可得值域；

(2)(i)由二次函数根的分布列不等式组求参数范围；(ii)应用根与系数关系得$4x_1+x_2=4x_1+\dfrac{1}{x_1}$，结合基本不等式求最小值，进而确定$x_1,x_2$的值，结合$x_1+x_2=2a$即可得$a$的值.

【小问1详解】

由题设$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，故最小值为$f(1)=0$，

又开口向上且对称轴为$x=1$，则$x\in[-2,3]$上最大值$f(-2)=(-2-1)^2=9$，

综上，函数$f(x)$在区间$x\in[-2,3]$上的值域为$[0,9]$.

【小问2详解】

由函数$f(x)$有两个正数零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，

(i)所以$\begin{cases}x=a>0\\f(0)=1>0\\\Delta=4a^2-4>0\end{cases}$，则$a>1$.

(ii) $x_1+x_2=2a, x_1x_2=1$，则$4x_1+x_2=4x_1+\dfrac{1}{x_1}\ge 2\sqrt{4x_1\cdot\dfrac{1}{x_1}}=4$，

当且仅当$x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=2$时等号成立，故$4x_1+x_2$的最小值为4，

此时$x_1+x_2=2a=\dfrac{5}{2}\Rightarrow a=\dfrac{5}{4}$.

20.【答案】(1)当$x=120$时，$y=57000$元；当$x=140$时，$y=65000$元；

(2)$y=\begin{cases}800x-39000,100\le x\le 130\\65000,130<x\le 150\end{cases}$；

(3)$120\le x\le 150$.

【分析】(1)根据题设得到解析式，将$x=120$、$x=140$代入求值；

(2)根据(1)所得解析式即得；

(3)讨论不同区间，令$y\ge 57000$求市场需求量x的范围.

【小问1详解】

由题意$y=\begin{cases}500x-300(130-x),100\le x\le 130\\500\times 130,130<x\le 150\end{cases}$，即$y=\begin{cases}800x-39000,100\le x\le 130\\65000,130<x\le 150\end{cases}$，

当 $x=120$ 时，$y=800\times120-39000=57000$ 元；

当 $x=140$ 时，$y=65000$ 元.

【小问 2 详解】

由（1）知：$y=\begin{cases}800x-39000,100\le x\le130\\65000,130<x\le150\end{cases}$.

【小问 3 详解】

当 $100\le x\le130$，令 $800x-39000\ge57000$，可得 $x\ge120$，则 $120\le x\le130$；

当 $130<x\le150$，$y=65000>57000$ 恒成立，则 $130<x\le150$；

综上，$120\le x\le150$.

21.【答案】（1）$a>0$

（2）证明见解析　（3）证明见解析

【分析】（1）由题意得 $y=\dfrac{f(x)}{x}=ax+a$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数，由一次函数性质 $a>0$；

（2）由 $x_1<x_1+x_2,x_2<x_1+x_2$，可得 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}<\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，$\dfrac{f(x_2)}{x_2}<\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，两式相加化简即可得结果；

（3）取 $t\in(0,+\infty)$，满足 $f(t)>0$，记 $f(t)=m$，由（2）知 $f(2t)>2m$，同理 $f(4t)>2f(2t)>4m$，$f(8t)>2f(4t)>8m$，则一定存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $f(2nt)>2nm>2023$.

【小问 1 详解】

由题意得 $y=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{ax^2+ax}{x}=ax+a$ 在 $(0,+\infty)$ 是增函数.

由一次函数性质知：当 $a>0$ 时，$y=ax+a$ 在（$0,+\infty$）上是增函数，$\therefore a>0$

【小问 2 详解】

$\because$ $f(x)$ 是“一阶比增函数”，即 $f(x)x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，又 $\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，有

$x_1<x_1+x_2,x_2<x_1+x_2$，

$$\therefore \frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},\quad \frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},$$

$$\therefore f(x_1)<\frac{x_1f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},\quad f(x_2)<\frac{x_2f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},$$

$$\therefore f(x_1)+f(x_2)<\frac{x_1f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}+\frac{x_2f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}=f(x_1+x_2)$$

【小问 3 详解】

设 $f\left(x_0\right)=0$，其中 $x_0>0$，因为 $f\left(x\right)$ 是"一阶比增函数"，所以当 $x>x_0$ 时，$\dfrac{f\left(x\right)}{x}>\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0}=0$.

取 $t\in\left(0,+\infty\right)$，满足 $f\left(t\right)>0$，记 $f\left(t\right)=m$，由（2）知 $f\left(2t\right)>2m$，

同理 $f\left(4t\right)>2f\left(2t\right)>4m$， $f\left(8t\right)>2f\left(4t\right)>8m$，

所以一定存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $f\left(2nt\right)>2nm>2023$，

所以 $f\left(x\right)>2023$ 一定有解.

【点睛】新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的.遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！