高一第一学期期中试卷

数学

2023.11

年级________ 班级________ 姓名________ 考号________

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．已知集合 $A=\{-1,0\}$，$B=\{x|-1<x<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{-1\}$　　B．$\{0\}$　　C．$\{-1，0\}$　　D．$\{-1，0，1\}$

2．命题 $\forall x\in(-1,0)$，$x^2+x<0$ 的否定是（　　）

A．$\forall x\in(-1,0)$，$x^2+x>0$　　B．$\forall x\in(-1,0)$，$x^2+x\le 0$

C．$\exists x\in(-1,0)$，$x^2+x>0$　　D．$\exists x\in(-1,0)$，$x^2+x\ge 0$

3．下列函数中，既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　　）

A．$y=-|x|$　　B．$y=x^2$　　C．$y=x^3$　　D．$y=-\dfrac{1}{x}$

4．已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$，则 $f(-1)+f(0)=$（　　）

A．-2　　B．0　　C．2　　D．4

5．已知 $a>b>c$，$a+b+c=0$，则下列结论一定正确的是（　　）

A．$ab>0$　　B．$ac<0$　　C．$a+c>0$　　D．$a+b<0$

6．函数 $f(x)=x^2-2x$，$x\in[-2,2]$ 的值域是（　　）

A．$[-1,0]$　　B．$[0,8]$　　C．$[1,8]$　　D．$[-1,8]$

7．已知正数 x,y 满足 $x+y=1$，则 $\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值是（　　）．

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$　　D．$2+\sqrt{2}$

8．若函数 $f(x)=-x^2+2ax$ 与函数 $g(x)=\dfrac{a}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上都是减函数，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(0,1]$　　C．$(-1,0)\cup(0,1)$　　D．$(-1,0)\cup(0,1]$

9. 对$\forall x\in\mathbf{R}$，$[x]$表示不超过x的最大整数，我们把$f(x)=[x]$，$x\in\mathbf{R}$称为取整函数，以下关于"取整函数"的性质叙述错误的是（　　）

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，$[4x]=4[x]+2$　　　　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$

C. $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$[x+y]\le[x]+[y]$　　　　D. $\forall x,y\in\mathbf{R}$，$[x]=[y]$，则$|x-y|<1$

10. 已知集合$M=\{x\in\mathbf{N}\,|\,1\le x\le 15\}$，集合$A_1,A_2,A_3$满足：

①每个集合都恰有5个元素且$A_1\cup A_2\cup A_3=M$；

②集合A_i中元素的最大值与最小值之和称为集合A_i的特征数，记为X_i（$i=1,2,3$）.

则$X_1+X_2+X_3$的最大值与最小值的和为（　　）

A. 57　　B. 72　　C. 87　　D. 96

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

11. 函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}$的定义域是________.

12. 已知二次函数$f(x)$同时具有以下性质：

①$f(x)$有2个零点；　　②$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

写出符合上述条件的一个函数$f(x)$，其解析式为$f(x)=$________.

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge t\\ x, & 0<x<t\end{cases}$，其中实数$t>0$.

①当$t=1$时，$f(x)$的值域为________；

②若$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，则t的取值范围是________.

14. 50名学生参加甲、乙两项体育活动，每人至少参加了一项，参加甲项的学生有30名，参加乙项的学生有25名，则仅参加了一项活动的学生人数为________.

15. 已知函数$f(x)=x^2-|x+a|$，下列命题中

①$\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)$都不是$\mathbf{R}$上的单调函数；

②$\exists a\in\mathbf{R}$，使得$f(x)$是$\mathbf{R}$上偶函数；

③若$f(x)$的最小值是$-\frac{5}{4}$，则$a=-1$；

④$\exists a<0$，使得$f(x)$有三个零点.

则所有正确的命题的序号是________.

（请将答案全部填涂在答题卡相应位置上）

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16. (本小题 15 分)求下列关于 x 的不等式的解集.

（1）$x^2-3x-10>0$；　　（2）$\frac{4}{x-1}+1\le 0$.

（3）$x^2+2x+a(2-a)<0$.

17. (本小题 14 分)设集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x\mid |x|<a\}$

（1）当 $a=2$ 时，分别求 $A\cup B$，$A\cap \complement_{\mathbf{R}}B$；

（2）若“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围.

18. (本小题 14 分)关于 x 的方程 $k^2x^2+2(k+1)x+1=0$（$k\ne 0$）有两个不等实根 x_1,x_2.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）当 $k=1$ 时，求 $x_1^2+x_2^2$ 的值；

（3）若 $(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})^2=8$，求实数 k 的值.

19. (本小题 13 分)

某公司计划投资 A，B 两种金融产品，根据市场调查与预测，A 产品的利润 y_1 与投资金额 x 的函数关系为 $y_1=18-\frac{180}{x+10}$，B 产品的利润 y_2 与投资金额 x 的函数关系为 $y_2=\frac{x}{5}$（注：利润与投资金额单位：万元）.

现在该公司有 100 万元资金，并全部投入 A,B 两种产品中且均有投入，其中 x 万元资金投入 A 产品.

（1）请把 A,B 两种产品利润总和 y 表示为 x 的函数，并直接写出定义域；

（2）在（1）的条件下，当 x 取何值时才能使公司获得最大利润？

20. (本小题 14 分)

已知二次函数 $f(x)$ 最小值为 -9，且 -1 是其一个零点，$\forall x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(2-x)=f(2+x)$.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）求 $f(x)$ 在区间 $[-1,a]$ 上的最小值；

（3）是否存在实数 a 满足：对 $\forall x\in[-1,a]$，都有 $f(x)\ge a-11$ 恒成立？若存在，求实数 a 的取值范围；若不存在，请说明理由.

21.（本小题 15 分）对非空整数集合 M 及 $k\in\mathbf{N}$，定义

$$M\oplus k=\{m+t\mid m\in M,t=-k,-k+1,\cdots,k\}.$$

对于非空整数集合 A,B，定义 $d(A,B)=\min\{k\in\mathbf{N}\mid A\subseteq B\oplus k,B\subseteq A\oplus k\}$.

（1）设 $M=\{2,4,6\}$，请直接写出集合 $M\oplus 1$；

（2）设 $A=\{1,2,3,4,\cdots,100\}$，$d(A,B)=1$，求出非空整数集合 B 的元素个数的最小值；

（3）对三个非空整数集合 A,B,C，若 $d(A,B)=4$ 且 $d(B,C)=1$，求 $d(A,C)$ 所有可能取值.

高一第一学期期中试卷参考答案

班级：__________ 学号：__________ 姓名：__________

1． B

2． D

3． B

4． A

5． B

6． D

7． C

8． B

9． C

10． D

11． $[0,1)\cup(1,+\infty)$

12． x^2-1（答案不唯一）

13． $(0,+\infty)$；$[1,+\infty)$

14． 45

15． ①②④

16． （1）$(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$；

（2）$[-3,1)$；

（3）当$a=1$时，解集为$\varnothing$；

当$a<1$时，解集为$(a-2,-a)$；

当$a>1$时，解集为$(-a,a-2)$；

17． （1）$A\cup B=(-2,3)$； $A\cap\complement_{\mathbf{R}}B=[2,3)$；（2）$[3,+\infty)$

18． （1）$(-\frac{1}{2},0)\cup(0,+\infty)$；（2）14；（3）$\sqrt{2}-1$

19． （1）$y=-\dfrac{180}{x+10}-\dfrac{x+10}{5}+40$， $x\in(0,100)$；（2）当且仅当$x=20$时，$y_{\max}=28$

20． （1） $f(x)=x^2-4x-5$；（2） $f(x)_{\min}=\begin{cases}a^2-4a-5, & -1<a\le 2\\ -9, & a\ge 2\end{cases}$；需要写出最值点 （3）$(-1,2]$

21． （1）$M\oplus 1=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

（2）设B有$|B|$个元素，下证$|B|_{\min}=34$.

一方面，$B=\{2,5,8,\cdots,98,101\}$，则$A\not\subset B\oplus 0=B$，$\therefore d(A,B)\ne 0,\therefore d(A,B)\ge 1$.

而$B\subseteq A\oplus 1=\{0,1,2,\cdots,101\}$，$A\subseteq B\oplus 1=\{1,2,3,\cdots,102\}$，可得$d(A,B)=1$，符合题意.

此时$|B|=34$，故$|B|_{\min}\le 34$.

另一方面，假设$|B|=j\le 33$，则令$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_j\}$且$b_1<b_2<\cdots<b_j$.

可知 $A\subseteq B\oplus 1=\{b_1-1,b_1,b_1+1\}\cup\{b_2-1,b_2,b_2+1\}\cup\cdots\cup\{b_j-1,b_j,b_j+1\}$，

右边最多含有 $3j\le 99$ 个元素，矛盾.

因此 $|B|\ge 34$，综上 B 至少含 34 个元素.

（3）先证明 $(M\oplus k)\oplus l\subseteq M\oplus(k+l)$.

易见，$M\oplus k=\{n\in Z\mid \exists m\in M,|n-m|\le k\}$，

因此只要 $M_1\subseteq M_2$，就有 $M_1\oplus k\subseteq M_2\oplus k$.

$\forall x\in(M\oplus k)\oplus l$，$\exists p\in M\oplus k,|x-p|\le l,\therefore \exists m\in M,|m-p|\le k$，

因此相加得 $|m-x|\le k+l$，即 $x\in M\oplus(k+l)$，$(M\oplus k)\oplus l\subseteq M\oplus(k+l)$，得证.

注：其实 $(M\oplus k)\oplus l\subseteq M\oplus(k+l)$.

$\forall x\in M\oplus(k+l)$，$\exists m\in M,|x-m|\le k+l$，

因此可得 $\{m-k,m-k+1,\cdots,m+k\}\cap\{x-l,\ x-l+1,\cdots,x+l-1,x+l\}\ne\varnothing$，

即 $\exists p\in Z,|x-p|\le l,\ |p-m|\le k$.

于是 $p\in M\oplus k$，而 $x\in(M\oplus k)\oplus l$，即得 $M\oplus(k+l)\subseteq(M\oplus k)\oplus l$.

再证明：对于任意三个非空整数集合 A,B,C，总有 $d(A,B)+d(B,C)\ge d(A,C)$.

令 $d_1=d(A,B),\ d_2=d(B,C)$，则 $C\subseteq B\oplus d_2\subseteq(A\oplus d_1)\oplus d_2=A\oplus(d_1+d_2)$，

同理 $A\subseteq B\oplus d_1\subseteq(C\oplus d_2)\oplus d_1=C\oplus(d_1+d_2)$，

因此由定义可得，

$$d(A,C)\le d_1+d_2=d(A,B)+d(B,C),$$

即 d 满足距离的三角不等式.

因此本题中，$d(A,C)\le d(A,B)+d(B,C)=5$，且 $d(A,C)+d(B,C)\ge d(A,B)=4$，

得出 $d(A,C)\ge 3$，即 $d(A,C)=3,4,5$.

取 $A=\{0\},B=\{4\},C=\{5\}$ 可知 $d(A,C)=5$ 可能成立;

取 $A=\{0\},B=\{4\},\ C=\{3\}$ 可知 $d(A,C)=3$ 可能成立.

取 $A=\{0\},B=\{4\},\ C=\{3,4\}$，可知 $d(A,C)=4$ 可能成立.

综上，$d(A,C)$ 的所有可能取值为 $3,4,5$.

建议评标:

$(M\oplus k)\oplus l\subseteq M\oplus(k+l)$ 证明 2 分，

猜到 $d(A,B)+d(B,C)\ge d(A,C)$ 1 分，证明 1 分，

夹出 $3\le d(A,C)\le 5$，写出取值范围 $\{3,4,5\}$ 1 分，举例 1 分.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！