2016 年高考真题 理科数学（北京卷）

理科数学

考试时间：____分钟

题型	单选题	填空题	简答题	总分
得分				

单选题 （本大题共 8 小题，每小题____分，共____分。）

1.已知集合 $A=\{x||x|<2\}$， $B=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $A\bigcap B=$ （）

A. $\{0,1\}$

B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-1,0,1\}$

D. $\{-1,0,1,2\}$

2.若 x， y 满足 $\begin{cases}2x-y\le 0\\ x+y\le 3\\ x\ge 0\end{cases}$，则 $2x+y$ 的最大值为（）

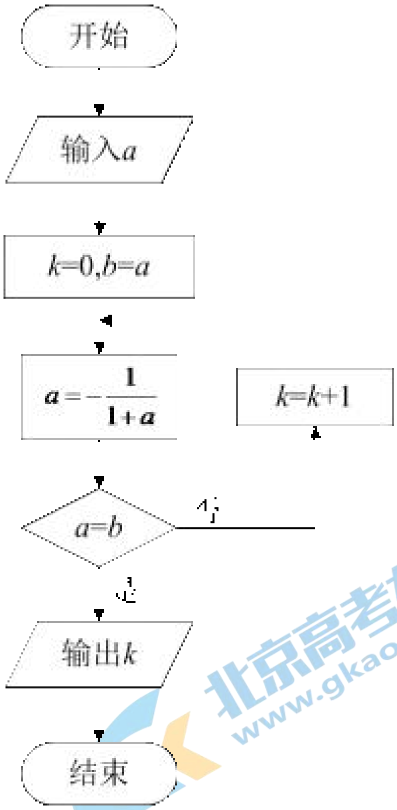
A. 0

B. 3

C. 4

D. 5

3.执行如图所示的程序框图，若输入的 a 值为 1，则输出的 k 值为（）



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4.设$\vec{a}$，$\vec{b}$是向量，则“$|\vec{a}|=|\vec{b}|$”是“$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$”的（）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5.已知x，$y\in R$，且$x>y>0$，则（）

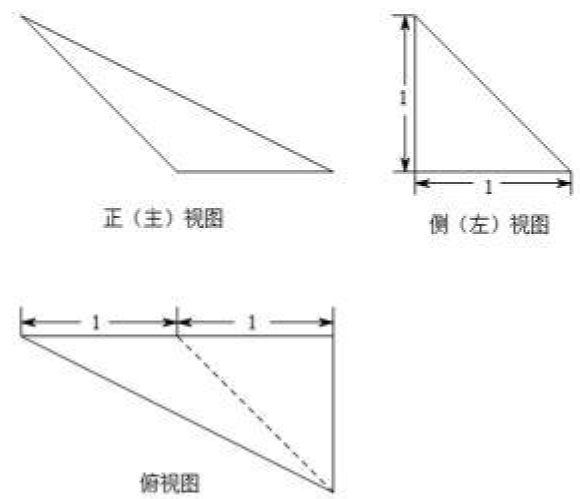
A. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}>0$

B. $\sin x-\sin y>0$

C. $(\frac{1}{2})^x-(\frac{1}{2})^y<0$

D. $\ln x+\ln y>0$

6.某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为（）



A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

7.将函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 图象上的点 $P(\frac{\pi}{4},t)$ 向左平移 s（$s>0$） 个单位长度得到点 P'，

若 P' 位于函数 $y=\sin 2x$ 的图象上，则（）

A. $t=\frac{1}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

B. $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$

C. $t=\frac{1}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

D. $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$， s 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

8.袋中装有偶数个球，其中红球、黑球各占一半.甲、乙、丙是三个空盒.每次从袋中任意取出两个球，将其中一个球放入甲盒，如果这个球是红球，就将另一个球放入乙盒，否则就放入丙盒.重复上述过程，直到袋中所有球都被放入盒中，则（）

A. 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球

B. 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多

C. 乙盒中红球不多于丙盒中红球

D. 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

填空题 （本大题共 6 小题，每小题___分，共___分。）

9.设 $a\in R$，若复数 $(1+i)(a+i)$ 在复平面内对应的点位于实轴上，则 $a=$_______________.

10.在 $(1-2x)^6$ 的展开式中， x^2 的系数为__________________.（用数字作答）

11.在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-1=0$ 与圆 $\rho=2\cos\theta$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$______.

12.已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，若 $a_1=6$，$a_3+a_5=0$，则 $S_6=$______..

13.双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的渐近线为正方形 OABC 的边 OA，OC 所在的直线，点 B 为该双曲线的焦点，若正方形 OABC 的边长为 2，则 $a=$______________.

14.设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, x\le a\\-2x, x>a\end{cases}$.

①若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为_____________；

②若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是________.

简答题（综合题）（本大题共 6 小题，每小题___分，共___分。）

在Δ ABC 中，$a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$.

15.求 $\angle B$ 的大小；

16.求 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 的最大值.

A、B、C 三个班共有 100 名学生，为调查他们的体育锻炼情况，通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间，数据如下表（单位：小时）；

A 班	6	6.5	7	7.5	8			
B 班	6	7	8	9	10	11	12	
C 班	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

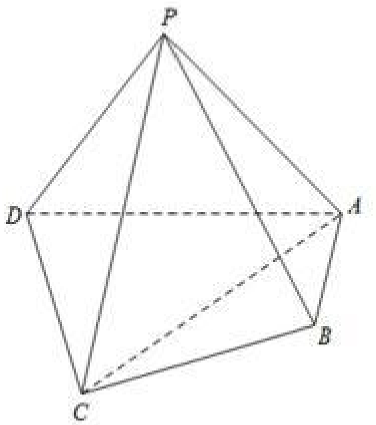
17.试估计 C 班的学生人数；

18.从 A 班和 C 班抽出的学生中，各随机选取一人，A 班选出的人记为甲，C 班选出的人记为乙，假设所有学生的锻炼时间相对独立，求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率；

19.再从 A、B、C 三个班中各随机抽取一名学生，他们该周的锻炼时间分别是 7，9，8.25（单位：小时），这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记 μ_1 ，表格中数据的平均数记为 μ_0 ，试判断 μ_0 和 μ_1 的大小，（结论不要求证明）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$， $PA\perp PD$， $PA=PD$， $AB\perp AD$，

$AB=1$， $AD=2$， $AC=CD=\sqrt{5}$.



20.求证： $PD\perp$ 平面 PAB ；

21.求直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值；

22.在棱 PA 上是否存在点 M ，使得 $BM//$ 平面 PCD？若存在，求 $\dfrac{AM}{AP}$ 的值；若不存在，说明理由.

设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$，

23.求 a， b 的值；

24.求 $f(x)$ 的单调区间.

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A(a,0)$，$B(0,b)$，$O(0,0)$，$\Delta OAB$ 的面积为 1.

25.求椭圆 C 的方程；

26.设 P 的椭圆 C 上一点，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N.

求证：$|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

设数列 A：a_1，a_2，$\cdots a_N$（$N\geq$）.如果对小于 n（$2\leq n\leq N$）的每个正整数 k 都有 $a_k<a_n$，则称 n 是数列 A 的一个“G 时刻”.记“$G(A)$ 是数列 A 的所有“G 时刻”组成的集合.

27.对数列 A：-2，2，-1，1，3，写出 $G(A)$ 的所有元素；

28.证明：若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n>a_1$，则 $G(A)\neq\varnothing$；

29.证明：若数列 A 满足 $a_n-a_{n-1}\leqslant 1$（n=2,3, …,N）,则 $G(A)$ 的元素个数不小于 a_N-a_1.

答案

单选题

1. C 2. C 3. B 4. D 5. C 6. A 7. A 8. B

填空题

9.

-1.

10.

60.11.

2

12.

6

13.

2

14.

2，$(-\infty,-1)$.

简答题

15.

（1）$\dfrac{\pi}{4}$；

16.

（2）1.

17.

（1）40；

18.

（2）$\frac{3}{8}$；

19.

$\mu_1<\mu_0$.

20.

见解析；

21.

$\frac{\sqrt{3}}{3}$；

22.

存在，$\frac{AM}{AP}=\frac{1}{4}$

23.

（Ⅰ）$a=2$，$b=e$；

24.

（2）$f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$.

25.

（1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

26.

详见解析.

27.

（1）$G(A)$ 的元素为 2 和 5；

28.

详见解析；

29.

详见解析.

解析

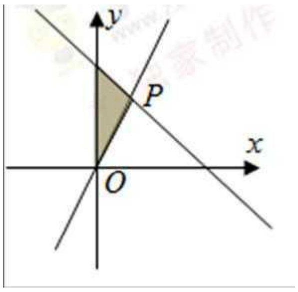
单选题

1.

由 $A=\{x|-2<x<2\}$,得 $A\cap B=\{-1,0,1\}$,故选 C

2.

作出如图可行域，则当 z=2x+y 经过点 P 时，取得最大值，而 P（1,2），所以最大值为 4，故选 C.



3.

输入 $a=1$，则 $k=0$，$b=1$；

进入循环体，$a=-\frac{1}{2}$，否，$k=1$，$a=-2$，否，$k=2$，$a=1$，此时 $a=b=1$，输出 k，则 $k=2$，选 B.

4.

由$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|\Leftrightarrow\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\Leftrightarrow\vec{a}\bullet\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$，故是既不充分也不必要条件，故选 D

5.

A：由$x>y>0$，得$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，即$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$，A 不正确；

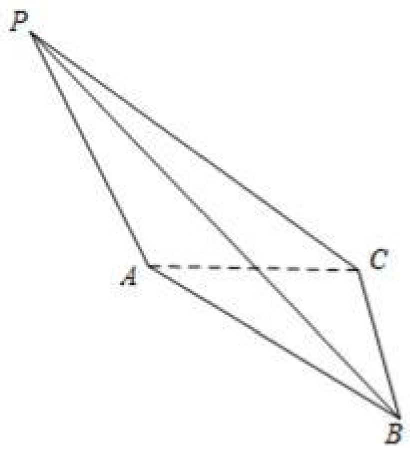
B：由$x>y>0$及正弦函数$y=\sin x$的单调性，可知$\sin x-\sin y>0$不一定成立；

C：由$0<\frac{1}{2}<1$，$x>y>0$，得$(\frac{1}{2})^x<(\frac{1}{2})^y$，故$(\frac{1}{2})^x-(\frac{1}{2})^y<0$，C 正确；

D：由$x>y>0$，得$xy>0$，不一定大于 1，故$\ln x+\ln y>0$不一定成立，故选 C.

6.

分析三视图可知，该几何体为一三棱锥$P-ABC$，其体积$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1=\frac{1}{6}$，故选 A.



7.

由题意得，$t=\sin(2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$，故此时 P' 所对应的点为$(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2})$，此时向左平移$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$个单位，故选 A

8.

解：取两个球共有 4 种情况：

①红+红，则乙盒中红球数加 1 个；

②黑+黑，则丙盒中黑球数加 1 个；

③红+黑（红球放入甲盒中），则乙盒中黑球数加 1 个；

④黑+红（黑球放入甲盒中），则丙盒中红球数加 1 个.

设一共有球 2a 个，则 a 个红球，a 个黑球，甲中球的总个数为 a，其中红球 x 个，黑球 y 个，x+y=a.

则乙中有 x 个球，其中 k 个红球，j 个黑球，k+j=x；

丙中有 y 个球，其中 l 个红球，i 个黑球，i+l=y；

黑球总数 a=y+i+j，又 x+y=a，故 x=i+j

由于 x=k+j，所以可得 i=k，即乙中的红球等于丙中的黑球.

故选 B.

填空题

9.

$(1+i)(a+i)=a-1+(a+1)i\in R\Rightarrow a=-1$，故填：$-1$.

10.

根据二项展开的通项公式 $T_{r+1}=C_6^r(-2)^r x^r$ 可知，x^2 的系数为 $C_6^2(-2)^2=60$，故填：60.

11.

分别将直线方程和圆方程化为直角坐标方程：直线为 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 过圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 圆心，

因此 AB=2，故填 2

12.

$\because \{a_n\}$ 是等差数列，$\therefore a_3+a_5=2a_4=0$，$a_4=0$，$a_4-a_1=3d=-6$，$d=-2$，

$\therefore S_6=6a_1+15d=6\times6+15\times(-2)=6$，故填：6.

13.

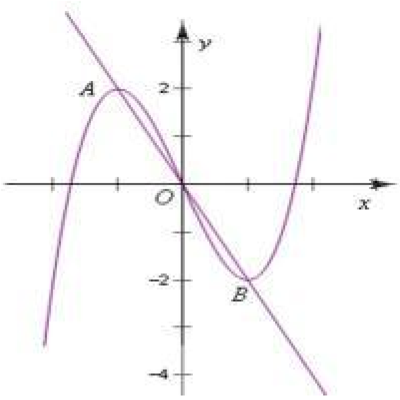
$\because$OABC是正方形，$\therefore\angle AOB=45^{0}$，即直线OA方程为$y=x$，此为双曲线的渐近线，因此$a=b$，又由题意$|OB|=2\sqrt{2}$，$\therefore a^2+a^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$，$\therefore a=2$，故填:2

14.

如图作出函数$g(x)=x^3-3x$与直线$y=-2x$的图象，它们的交点是$A(-1,2)$，$O(0,0)$，$B(1,-2)$，由$g'(x)=3x^2-3$，知$x=1$是函数$g(x)$的极大值点，

①当$a=0$时，$f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\le0\\-2x,x>0\end{cases}$，因此$f(x)$的最大值是$f(-1)=2$；

②由图象知当$a\ge-1$时，$f(x)$有最大值是$f(-1)=2$；只有当$a<-1$时，由$a^3-3a<-2a$，因此$f(x)$无最大值，$\therefore$所求a的范围是$(-\infty,-1)$，故填：2，$(-\infty,-1)$.



简答题

15.

（1）根据余弦定理公式求出 cosB 的值，进而根据 B 的取值范围求 B 的大小；

16.

（2）由辅助角公式对 $\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 进行化简变形，进而根据 A 的取值范围求其最大值.

试题解析：（1）由余弦定理及题设得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又∵ $0<\angle B<\pi$，∴ $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$；（2）由（1）知 $\angle A+\angle C=\dfrac{3\pi}{4}$，

$\sqrt{2}\cos A+\cos C=\sqrt{2}\cos A+\cos(\dfrac{3\pi}{4}-A)=\sqrt{2}\cos A-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\cos(A-\dfrac{\pi}{4})$，因为 $0<\angle A<\dfrac{3\pi}{4}$，所以当 $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sqrt{2}\cos A+\cos C$ 取得最大值 1.

17.

（1）由已知可得，抽出的 20 名学生中，来自 C 班的学生有 8 名，根据分层抽样方法，C 班的学生

人数估计为 $100\times\dfrac{8}{20}=40$；

18.

（2）设事件 A_i 为“甲是现有样本中 A 班的第 i 个人”，$i=1,2,\cdots,5$，

事件 C_j 为"乙是现有样本中 C 班的第 j 个人"，$j=1,2,\cdots,8$，

由题意可知，$P(A_i)=\frac{1}{5}$，$i=1,2,\cdots,5$；$P(C_j)=\frac{1}{8}$，$j=1,2,\cdots,8$，

$P(A_iC_j)=P(A_i)P(C_j)\frac{1}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{40}$，$i=1,2,\cdots,5$，$j=1,2,\cdots,8$．

设事件 E 为"该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长"，由题意知，

$$E=A_1C_1\cup A_1C_2\cup A_2C_1\cup A_2C_2\cup A_2C_3\cup A_3C_1\cup A_3C_2\cup A_3C_3\cup$$

$$A_4C_1\cup A_4C_2\cup A_4C_3\cup A_5C_1\cup A_5C_2\cup A_5C_3\cup A_5C_4$$

因此

$$P(E)=P(A_1C_1)+P(A_1C_2)+P(A_2C_1)+P(A_2C_2)+P(A_2C_3)+P(A_3C_1)+P(A_3C_2)+P(A_3C_3)$$

$$+P(A_4C_1)+P(A_4C_2)+P(A_4C_3)+P(A_5C_1)+P(A_5C_2)+P(A_5C_3)+P(A_5C_4)=15\times\frac{1}{40}=\frac{3}{8}$$

19.

根据平均数计算公式即可知，$\mu_1<\mu_0$．

20.

（1）因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\perp AD$

所以 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$，

又因为 $PA\perp PD$，所以 $PD\perp$ 平面 PAB；

21.

（2）取 AD 的中点 O，连结 PO，CO，

因为 $PA=PD$，所以 $PO\perp AD$.

又因为 $PO\subset$ 平面 PAD，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $CO\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp CO$.

因为 $AC=CD$，所以 $CO\perp AD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，由题意得，

$A(0,1,0),B(1,1,0),C(2,0,0),D(0,-1,0),P(0,0,1)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

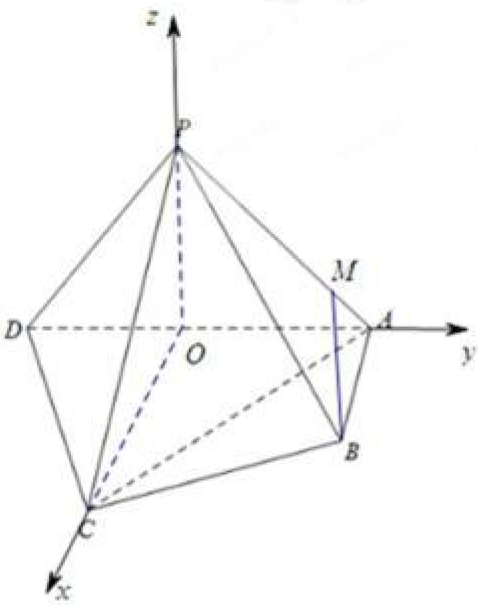
$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}-y-z=0,\\ 2x-z=0,\end{cases}$$

令 $z=2$，则 $x=1,y=-2$.

所以 $\vec{n}=(1,-2,2)$.

又 $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{PB}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{PB}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 PB 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



22.

设 M 是棱 PA 上一点，则存在 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$.

因此点 $M(0,1-\lambda,\lambda),\overrightarrow{BM}=(-1,-\lambda,\lambda)$.

因为 $BM \not\subset$ 平面 PCD，所以 BM // 平面 PCD 当且仅当 $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$，

即 $(-1,-\lambda,\lambda)\cdot(1,-2,2)=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{4}$.[来源:学&科&网 Z&X&X&K]

所以在棱 PA 上存在点 M 使得 BM // 平面 PCD，此时 $\dfrac{AM}{AP}=\dfrac{1}{4}$.

23.

（1）因为f (x)=x$e^{a-x}+bx$,所以$f'(x)=(1-x)e^{a-x}+b$

依题设，$\begin{cases} f(2)=2e+2, \\ f'(2)=e-1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2e^{a-2}+2b=2e+2, \\ -e^{a-2}+b=e-1, \end{cases}$

解得 $a=2, b=e$；

24.

（2）由（Ⅰ）知 $f(x)=xe^{2-x}+ex$.

由 $f'(x)=e^{2-x}(1-x+e^{x-1})$ 即 $e^{2-x}>0$ 知，$f'(x)$ 与 $1-x+e^{x-1}$ 同号.

令 $g(x)=1-x+e^{x-1}$，则 $g'(x)=-1+e^{x-1}$.

所以，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

故 $g(1)=1$ 是 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的最小值，

从而 $g(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$.

综上可知，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，故$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$.

25.

（1）由题意可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{1}{2}ab=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$a=2,b=1$.所以椭圆$C$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

26.

（2）由（Ⅰ）知，$A(2,0),B(0,1)$，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2+4y_0^2=4$.

当 $x_0\neq 0$时，直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$.

令 $x=0$，得 $y_M=-\frac{2y_0}{x_0-2}$.从而 $|BM|=|1-y_M|=\left|1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right|$.

直线 PB 的方程为 $y=\frac{y_0-1}{x_0}x+1$.

令 $y=0$，得 $x_N=-\frac{x_0}{y_0-1}$.从而 $|AN|=|2-x_N|=\left|2+\frac{x_0}{y_0-1}\right|$.

所以 $|AN|\cdot|BM|=\left|2+\frac{x_0}{y_0-1}\right|\cdot\left|1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right|$

$$=\left|\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|=\left|\frac{4x_0y_0-4x_0-8y_0+8}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|=4.$$

当 $x_0=0$时，$y_0=-1$，$|BM|=2$, $|AN|=2$,

所以 $|AN|\cdot|BM|=4$.

综上，$|AN|\cdot|BM|$为定值.

27.

（1）G(A)的元素为 2 和 5.

28.

（2）因为存在a_n使得$a_n > a_1$，所以$\{i \in N^* | 2 \le i \le N, a_i > a_1\} \ne \varnothing$.

记$m = \min\{i \in N^* | 2 \le i \le N, a_i > a_1\}$,

则$m \ge 2$，且对任意正整数$k < m, a_k \le a_1 < a_m$.

因此$m \in G(A)$，从而$G(A) \ne \varnothing$.

29.

（3）当$a_N \le a_1$时，结论成立.

以下设$a_N > a_1$.

由（Ⅱ）知$G(A) \ne \varnothing$.

设$G(A) = \{n_1, n_2, \cdots, n_p\}, n_1 < n_2 < \cdots < n_p$，记$n_0 = 1$.

则$a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \cdots < a_{n_p}$.

对$i = 0,1,\cdots,p$，记$G_i = \{k \in N^* | n_i < k \le N, a_k > a_{n_i}\}$.

如果$G_i \ne \varnothing$，取$m_i = \min G_i$，则对任何$1 \le k < m_i, a_k \le a_{n_i} < a_{m_i}$.

从而$m_i \in G(A)$且$m_i = n_{i+1}$.

又因为n_p是$G(A)$中的最大元素，所以$G_p = \varnothing$.

从而对任意$n_p \le k \le n$，$a_k \le a_{n_p}$，特别地，$a_N \le a_{n_p}$.

对 $i=0,1,\cdots,p-1$, $a_{n_{i+1}-1}\le a_{n_i}$.

因此 $a_{n_{i+1}}=a_{n_{i+1}-1}+(a_{n_{i+1}}-a_{n_{i+1}-1})\le a_{n_i}+1$.

所以 $a_N-a_1\le a_{n_p}-a_1=\sum\limits_{i=1}^{p}(a_{n_i}-a_{n_{i-1}})\le p$.