2023 北京八中高三 10 月月考

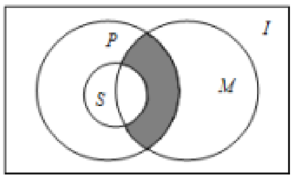
数　　学

年级：高三　科目：数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 如图，I 为全集，M、P、S 是 I 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是（　）



A. $(M\cap P)\cap S$　　　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap \complement_I S$　　　　D. $(M\cap P)\cup \complement_I S$

2. 复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $\overline{z}$ 对应点在第几象限（　）

A. 四　　　B. 三　　　C. 二　　　D. 一

3. 已知命题 $p:\exists x\in(-1,3)$，$x^2-a-2\le 0$.若 p 为假命题，则 a 的取值范围为（　）

A. $(-\infty,-2)$　　　B. $(-\infty,-1)$　　　C. $(-\infty,7)$　　　D. $(-\infty,0)$

4. 在△ABC 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\cos B=$（　）

A. $\dfrac{1}{9}$　　　B. $\dfrac{1}{3}$　　　C. $\frac{1}{2}$　　　D. $\frac{2}{3}$

5. 设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\dfrac{2}{3}$，则（　）

A. $a<c<b$　　　B. $a<b<c$　　　C. $b<c<a$　　　D. $c<a<b$

6. 已知 10 个产品中有 3 个次品，现从其中抽出若干个产品，要使这 3 个次品全部被抽出的概率不小于 0.6，则至少应抽出的产品个数为（　）

A. 7　　　B. 8　　　C. 9　　　D. 10

7. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A\ 1,0$ ，$B(1,1)$，且 $\angle BOP=90^\circ$.设 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}(k\in\mathbf{R})$，则 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=$（　）

A. $\frac{1}{2}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　C. $\sqrt{2}$　　　D. 2

8. 在 ΔABC 中，“$\sin A<\cos B$”是“ΔABC 为钝角三角形”的

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

9. 在一次调查中，甲、乙、丙、丁四名同学阅读量有如下关系：同学甲、丙阅读量之和与乙、丁阅读量之和相同，同学丙、丁阅读量之和大于甲、乙阅读量之和，乙的阅读量大于甲、丁阅读量之和.那么这四名同学中阅读量最大的是（　）

A. 甲　　　　B. 乙　　　　C. 丙　　　　D. 丁

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_2 x\right| & (0<x<2)\\ \sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) & (2<x<10)\end{cases}$，若存在实数 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$，则 $\dfrac{(x_3-2)(x_4-2)}{x_1x_2}$ 的范围是（　）

A. $(0,12)$　　　　B. $(4,16)$　　　　C. $(9,21)$　　　　D. $(15,25)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 45°，$k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 k=__________.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\log_2 n$，则 $a_5+a_6+a_7+a_8=$____________

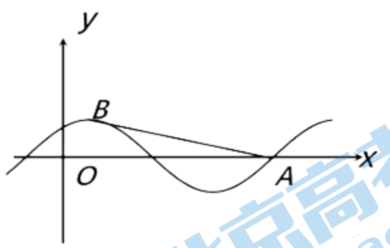
13. 已知 $3\sin 2x=2\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $\sin x=$______.

14. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin x$，$g(x)=\sqrt{2}\cos x$，A，B，C 是这两个函数图象的交点，若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为______.

15. 已知向量序列：$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\cdots,\vec{a_n},\cdots$ 满足如下条件：$\left|\vec{a_1}\right|=4\left|\vec{d}\right|=2$，$2\vec{a_1}\cdot\vec{d}=-1$ 且 $\vec{a_n}-\vec{a_{n-1}}=\vec{d}\,(n=2,3,4,\cdots)$. 若 $\vec{a_1}\cdot\vec{a_k}=0$，则 $k=$________；$\left|\vec{a_1}\right|,\left|\vec{a_2}\right|,\left|\vec{a_3}\right|,\cdots,\left|\vec{a_n}\right|,\cdots$ 中第________项最小.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16. 已知函数 $f(x)=2\cos\dfrac{x}{4}\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{4}+\cos\dfrac{x}{4}\right)-1$，$x\in\mathbf{R}$ 的部分图象如图所示.



（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调递增区间;

（2）设点 B 是图象上的 y 轴右侧的第一个最高点，点 A 是图象与 x 轴交点，求点 A 和点 B 的坐标.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $c=4$，再从下列三个条件中选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一，然后解决下列问题：

（1）求角 B 和 $\triangle ABC$ 的面积；

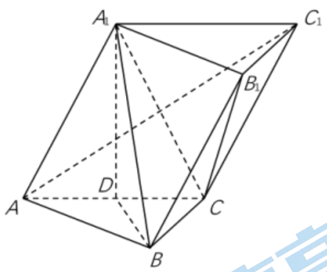
（2）求 AC 边上的高线 BD 的长.

条件①：$a\sin 2B = b\sin A$，$b=\sqrt{15}$；

条件②：$(2c-a)\cos B = b\cos A$，$a=6$；

条件③：$a=4$，$b^2+c^2=a^2-2bc$.

18. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，D 是线段 AC 的中点，且 $A_1D\perp$ 平面 ABC.



（1）求证：平面 $A_1BC\perp$ 平面 AA_1C_1C；

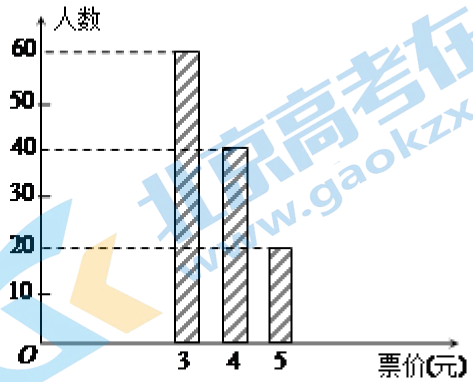
（2）求证：$B_1C//$ 平面 A_1BD；

（3）若 $A_1B\perp AC_1$，$AC=BC=2$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的表面积.

19. 2014 年 12 月 28 日开始，北京市公共电汽车和地铁按照里程分段计价.具体如下表.（不考虑公交卡折扣情况）

乘公共电汽车方案	10 公里（含）内 2 元； 10 公里以上部分，每增加 1 元可乘坐 5 公里（含）.
乘坐地铁方案（不含机场线）	6 公里（含）内 3 元； 6 公里至 12 公里（含）4 元； 12 公里至 22 公里（含）5 元； 22 公里至 32 公里（含）6 元； 32 公里以上部分，每增加 1 元可乘坐 20 公里（含）.

已知在北京地铁四号线上，任意一站到陶然亭站的票价不超过 5 元，现从那些只乘坐四号线地铁，且在陶然亭站出站的乘客中随机选出 120 人，他们乘坐地铁的票价统计如图所示.



（1）如果从那些只乘坐四号线地铁，且在陶然亭站出站的乘客中任选 1 人，试估计此人乘坐地铁的票价小于 5 元的概率；

（2）从那些只乘坐四号线地铁，且在陶然亭站出站的乘客中随机选 2 人，记 X 为这 2 人乘坐地铁的票价和，根据统计图，并以频率作为概率，求 X 的分布列和数学期望；

（3）小李乘坐地铁从 A 地到陶然亭的票价是 5 元，返程时，小李乘坐某路公共电汽车所花交通费也是 5 元，假设小李往返过程中乘坐地铁和公共电汽车的路程均为 s 公里，试写出 s 的取值范围.（只需写出结论）

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}(a>0)$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)\le x-\dfrac{1}{a}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）若 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0\left(x_1\ne x_2\right)$，证明：$x_1+x_2>2$.

21. 有限数列 A_n：a_1，a_2，…，a_n.（$n\ge 3$）同时满足下列两个条件：

①对于任意的 i，j（$1\le i<j\le n$），$a_i<a_j$；

②对于任意的 i，j，k（$1\le i<j<k\le n$），a_ia_j，a_ja_k，a_ia_k，三个数中至少有一个数是数列 A_n 中的项.

（1）若 $n=4$，且 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=a$，$a_4=6$，求 a 的值；

（2）证明：2，3，5 不可能是数列 A_n 中的项；

（3）求 n 的最大值.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.【答案】C

【分析】分析出阴影部分为 $M\cap P$ 和 $\complement_I S$ 的子集，从而选出正确答案.

【详解】题图中的阴影部分是 $M\cap P$ 的子集，不属于集合 S，故属于集合 S 的补集，即是 $\complement_I S$ 的子集，则阴影部分所表示的集合是 $(M\cap P)\cap\complement_I S$

故选：C

2.【答案】D

【分析】利用复数运算求出复数，再根据共轭复数及几何意义即可判断选择.

【详解】因为 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})}=\dfrac{3-\mathrm{i}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，

则 $\overline{z}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，

则 $\overline{z}$ 对应的点 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，位于第一象限.

故选：D.

3.【答案】A

【分析】

由题可得命题 p 的否定为真命题，即可由此求解.

【详解】$\because$ p 为假命题，

$\therefore \neg p:\forall x\in(-1,3)$，$x^2-a-2>0$ 为真命题，

故 $a<x^2-2$ 恒成立，

$\because$ $y=x^2-2$ 在 $x\in(-1,3)$ 的最小值为 -2，

$\therefore a<-2$.

故选：A.

4.【答案】A

【分析】根据已知条件结合余弦定理求得 AB，再根据 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，即可求得答案.

【详解】$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$

根据余弦定理：$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$

$AB^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\dfrac{2}{3}$

可得 $AB^2=9$，即 $AB=3$

由∵ $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{9+9-16}{2\times3\times3}=\dfrac{1}{9}$

故 $\cos B=\dfrac{1}{9}$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了余弦定理解三角形，考查了分析能力和计算能力，属于基础题.

5.【答案】A

【分析】分别将 a,b 改写为 $a=\dfrac{1}{3}\log_3 2^3$，$b=\dfrac{1}{3}\log_5 3^3$，再利用单调性比较即可.

【详解】因为 $a=\dfrac{1}{3}\log_3 2^3<\dfrac{1}{3}\log_3 9=\dfrac{2}{3}=c$，$b=\dfrac{1}{3}\log_5 3^3>\dfrac{1}{3}\log_5 25=\dfrac{2}{3}=c$，

所以 $a<c<b$.

故选：A.

【点睛】本题考查对数式大小的比较，考查学生转化与化归的思想，是一道中档题.

6.【答案】C

【分析】根据题意，设至少应抽出 x 个产品，由题设条件建立不等式 $\dfrac{C_3^3C_7^{x-3}}{C_{10}^x}\ge 0.6$，由此能求出结果.

【详解】解：要使这 3 个次品全部被抽出的概率不小于 0.6，设至少抽出 x 个产品，

则基本事件总数为 C_{10}^x，要使这 3 个次品全部被抽出的基本事件个数为 $C_3^3C_7^{x-3}$，

由题设知：$\dfrac{C_3^3C_7^{x-3}}{C_{10}^x}\ge 0.6$，

所以 $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{10\times9\times8}\ge\dfrac{3}{5}$，即 $x(x-1)(x-2)\ge 432$，

分别把 A，B，C，D 代入，得 C，D 均满足不等式，

因为求 x 的最小值，

所以 $x=9$.

故选：C.

【点睛】本题考查概率的应用，解题时要认真审题，仔细解答，注意合理的进行等价转化.

7.【答案】B

【分析】利用已知条件表示出向量 $\overrightarrow{OP}$，通过 $\angle BOP=90^\circ$，求出 k，然后求出 $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ 即可.

【详解】由题意，可得 $\overrightarrow{OA}=(1,0),\overrightarrow{OB}=(1,1)$，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}=(k+1,k)$，

又由 $\angle BOP=90^\circ$，可得 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OP}$，

则 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,1)\cdot(k+1,k)=2k+1=0$，解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，

即 $\overrightarrow{OP}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，所以 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B.

8.【答案】A

【分析】先由诱导公式将正弦化余弦，利用余弦函数的单调性得到角 A 或角 C 为钝角，再举反例说明必要性不成立即可.

【详解】$\because \sin A<\cos B \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)<\cos B$，且 B 必为锐角，

可得 $\frac{\pi}{2}-A>B$ 或 $A-\frac{\pi}{2}>B$，即角 A 或角 C 为钝角；

反之，当 $A=100°$，$B=30°$ 时，

$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $\sin A>\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos B$，所以 $\sin A<\cos B$ 不成立，

所以“$\sin A<\cos B$”是“ΔABC 为钝角三角形”的充分不必要条件，

故选 A .

【点睛】本题考查充分必要条件的判定，考查了三角形形状的判定，考查诱导公式及三角函数的单调性，属于综合题.

9.【答案】C

【分析】

设甲、乙、丙、丁的阅读量分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，根据题意得出等式与不等式，利用不等式的基本性质可得出 x_1、x_2、x_3、x_4 的大小关系，进而可得出结论.

【详解】设甲、乙、丙、丁的阅读量分别为 x_1、x_2、x_3、x_4，则 $x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，$x_3\geq 0$，$x_4\geq 0$.

由于同学甲、丙阅读量之和与乙、丁阅读量之和相同，则 $x_1+x_3=x_2+x_4$，①

同学丙、丁阅读量之和大于甲、乙阅读量之和，则 $x_1+x_2<x_3+x_4$，②

乙的阅读量大于甲、丁阅读量之和，则 $x_2>x_1+x_4$，③

②−①得 $x_2-x_3<x_3-x_2\Rightarrow 2(x_2-x_3)<0\Rightarrow x_2<x_3$，

②+①得 $2x_1+x_2+x_3<x_2+x_3+2x_4\Rightarrow x_1<x_4$，

由③得 $x_2>x_1$，$x_2>x_4$，所以，$x_1<x_4<x_2<x_3$.

即阅读量最大的是丙.

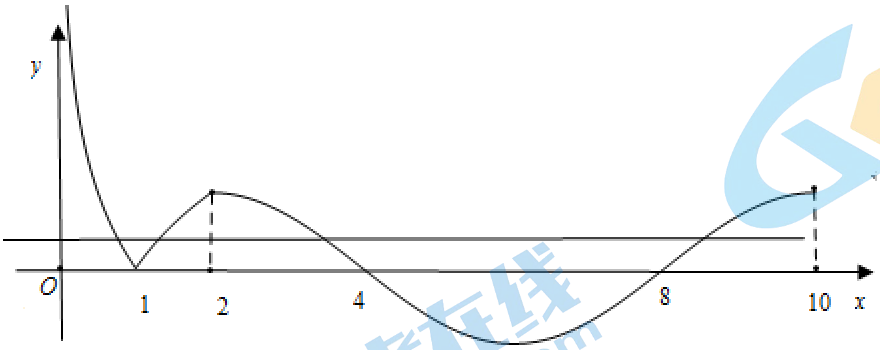
故选：C.

【点睛】本题考查推理案例的问题，关键是将语句之间的关系转化为等式与不等式关系，考查推理能力，属于基础题.

10. 答案】A

【分析】首先画出函数的图象，利用函数的性质可知$x_1x_2=1$，$x_3+x_4=12$，并且代入化简$\dfrac{(x_3-2)(x_4-2)}{x_1x_2}=x_3(12-x_3)-20=-(x_3-6)^2+16$，利用二次函数求取值范围.

【详解】函数的图象如图所示，



$\because f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore -\log_2 x_1=\log_2 x_2$，$\therefore x_1x_2=1$，

$\because f(x_3)=f(x_4)$，$\therefore x_3+x_4=12$，$2<x_3<4$，$8<x_4<10$

$\therefore \dfrac{(x_3-2)(x_4-2)}{x_1x_2}=x_3x_4-2(x_3+x_4)+4=x_3x_4-20$

$=x_3(12-x_3)-20=-(x_3-6)^2+16$，

又因为$2<x_3<4$，所以$0<-(x_3-6)^2+16<12$.

故选：A.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】首先求得向量的数量积，然后结合向量垂直的充分必要条件即可求得实数k的值.

【详解】由题意可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由向量垂直的充分必要条件可得：$\left(k\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$，

即：$k\times\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$，解得：$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【点睛】本题主要考查平面向量的数量积定义与运算法则，向量垂直的充分必要条件等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

12.【答案】1

【分析】求得 S_4, S_8，由此求得正确答案.

【详解】$S_4=\log_2 4=2, S_8=\log_2 8=3$，

所以 $a_5+a_6+a_7+a_8=S_8-S_4=3-2=1$.

故答案为：1

13.【答案】$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ## $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

【分析】先根据二倍角公式化简方程求出余弦值，再结合同角三角函数关系根据角的范围求出正弦值.

【详解】$\because 3\sin 2x=2\sin x, \therefore 3\times 2\sin x\cos x=2\sin x$，

$\because x\in(0,\pi), \sin x>0 \therefore 3\times 2\cos x=2, \therefore \cos x=\frac{1}{3}$，

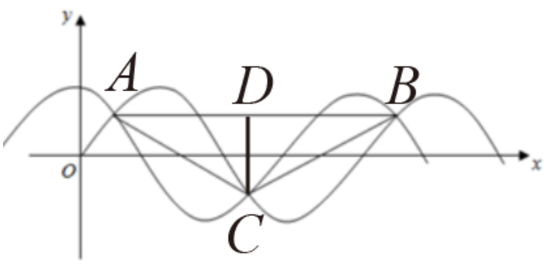
$\because \sin^2 x+\cos^2 x=1, \therefore \sin^2 x=\frac{8}{9} \therefore \sin x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

14.【答案】2π

【分析】利用函数的图象和性质的应用求出三角形的底和高，进一步求出三角形的面积.

【详解】$f(x)=\sqrt{2}\sin x$，$g(x)=\sqrt{2}\cos x$，画出两函数图象，如下：



当 A,B,C 为如图所示的三个相邻的交点时，$\triangle ABC$ 面积最小，

其中 $A\left(\frac{\pi}{4},1\right), B\left(\frac{9\pi}{4},1\right), C\left(\frac{5\pi}{4},-1\right)$，

过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D，

故 $AB=\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi$，$CD=2$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times 2\pi\times 2=2\pi$；

故答案为：2π

15.【答案】 ①. 9 ②. 3

【分析】由 $\overrightarrow{a_n}-\overrightarrow{a_{n-1}}=\vec{d}\,(n=2,3,4,\cdots)$ 可得 $\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{a_1}+(n-1)\vec{d}$，根据条件计算即可得 k 的值；根据数量积与模的关系将 $\left|\overrightarrow{a_n}\right|$ 转化为关于 n 的函数求何时取得最小值即可.

【详解】因为$\overrightarrow{a_n}-\overrightarrow{a_{n-1}}=\vec{d}\left(n=2,3,4,\cdots\right)$，所以$\overrightarrow{a_n}-\overrightarrow{a_{n-1}}=\vec{d},\overrightarrow{a_{n-1}}-\overrightarrow{a_{n-2}}=\vec{d},\ldots,\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{a_1}=\vec{d}$,

累加得$\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{a_1}+\left(n-1\right)\vec{d}$，所以$\overrightarrow{a_k}=\overrightarrow{a_1}+\left(k-1\right)\vec{d}$，

则$\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_k}=\overrightarrow{a_1}^2+\left(k-1\right)\overrightarrow{a_1}\cdot\vec{d}=0\Rightarrow 4-\dfrac{k-1}{2}=0,\therefore k=9$；

$\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{a_1}+\left(n-1\right)\vec{d}\Rightarrow\overrightarrow{a_n}^2=\left|\overrightarrow{a_n}\right|^2=\left[\overrightarrow{a_1}+\left(n-1\right)\vec{d}\right]^2=\dfrac{\left(n-1\right)^2}{4}-\left(n-1\right)+4\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$,

易知当$n-1=-\dfrac{-1}{2\times\frac{1}{4}}=2$时取得最小值，此时$n=3$.

故答案为：9；3.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.【答案】（1）4π；$\left[4k\pi-\dfrac{4\pi}{3},4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right],k\in Z$

（2）$A\left(\dfrac{11\pi}{3},0\right)$，$B\left(\dfrac{2\pi}{3},2\right)$

【分析】（1）利用三角恒等变换化简$f\left(x\right)$得$f\left(x\right)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$，由周期公式求得最小正周期，由$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$可解得单调递增区间；

（2）分别令$f\left(x\right)=2,f\left(x\right)=0$，求得点 A 和点 B 的坐标.

【小问 1 详解】

化简可得$f(x)=2\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+2\cos^2\dfrac{x}{4}-1=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)$,

由周期公式可得$T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$.

$\therefore$函数$f(x)$的最小正周期为4π，

由$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$可解得$4k\pi-\dfrac{4\pi}{3}\le x\le 4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore$函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[4k\pi-\dfrac{4\pi}{3},4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\right]$，$(k\in\mathbf{Z})$；

【小问 2 详解】

令$f\left(x\right)=2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=2$得$x=4k\pi+\dfrac{2\pi}{3}$，$(k\in\mathbf{Z})$，

因为点 B 是图象上的 y 轴右侧的第一个最高点，

所以令 $k=0$ 得 $B\left(\frac{2\pi}{3},2\right)$，

令 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0$ 得 $x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$，$(k\in\mathbf{Z})$，

由图知点 A 是图象上的 y 轴右侧与 x 轴的第二个交点，

所以令 $k=2$ 得 $A\left(\frac{11\pi}{3},0\right)$，

故 $A\left(\frac{11\pi}{3},0\right)$，$B\left(\frac{2\pi}{3},2\right)$.

17.【答案】（1）选②：$B=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$.

（2）$\frac{6\sqrt{21}}{7}$

【分析】（1）选②：由正弦定理及三角恒等变换得 $B=\frac{\pi}{3}$，代入面积公式求解.

（2）由面积公式求高线 BD 的长

【小问 1 详解】

选②：由 $(2c-a)\cos B=b\cos A$ 及正弦定理得，

$(2\sin C-\sin A)\cos B=\sin B\cos A$，

所以 $2\sin C\cos B=\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)$，

即 $2\sin C\cos B=\sin(\pi-A-B)=\sin C$，

因为 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

又 $c=4$，$a=6$，所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=36+16-24=28$，即 $b=2\sqrt{7}$，

故 $\triangle ABC$ 存在且唯一，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 6\times 4\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$，

综上：$B=\frac{\pi}{3}$，$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$.

下面说明条件①③不满足的理由：

条件①：因为 $a\sin 2B=b\sin A$，所以 $2a\sin B\cos B=b\sin A$，

由正弦定理得 $2ab\cos B=ba$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，

又因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

又$b=\sqrt{15}$，$c=4$，由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以$15=a^2+16-4a$，即$a^2-4a+1=0$，此方程有两解，

故满足条件的$\triangle ABC$有两解，所以①不满足.

条件③：由$b^2+c^2=a^2-2bc$得$(b+c)^2=a^2$，即$b+c=a$，不成立，

所以满足条件的$\triangle ABC$不存在，所以③不满足.

【小问 2 详解】

由（1）得$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{7}\cdot BD=6\sqrt{3}$，

所以$BD=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{6\sqrt{21}}{7}$.

18.【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析　（3）$8+2\sqrt{3}+\sqrt{14}$

【分析】（1）由$BC\perp$平面AA_1C_1C证得平面$A_1BC\perp$平面AA_1C_1C；

（2）连接AB_1，设$AB_1\cap A_1B=E$，连接DE，由$DE//B_1C$证得$B_1C//$平面A_1BD；

（3）证得四边形AA_1C_1C为菱形，求得其面积，证得$BC\perp CC_1$，求得$S_{四边形BCC_1B_1}$，作$DF\perp AB$于F，

证得$AB\perp A_1F$，求得$S_{四边形ABB_1A_1}$，从而求得三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的表面积.

【小问 1 详解】

因为$\angle ACB=90^\circ$，所以$BC\perp AC$，

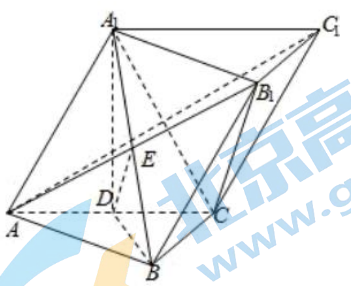
根据题意，$A_1D\perp$平面$ABC, BC\subset$平面ABC，所以$A_1D\perp BC$，

因为$A_1D\cap AC=D$，$A_1D, AC\subset$平面AA_1C_1C，所以$BC\perp$平面AA_1C_1C，

又因为$BC\subset$平面A_1BC，

所以平面$A_1BC\perp$平面AA_1C_1C.

【小问 2 详解】



连接AB_1，设$AB_1\cap A_1B=E$，连接DE，

根据棱柱的性质可知，E为AB_1的中点，

因为 D 是 AC 的中点，

所以 $DE//B_1C$，

又因为 $DE\subset$ 平面 $A_1BD, B_1C\not\subset$ 平面 A_1BD，

所以 $B_1C//$ 平面 A_1BD。

【小问 3 详解】

由（1）可知，$BC\perp$ 平面 AA_1C_1C，$AC_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BC\perp AC_1$，

又因为 $A_1B\perp AC_1, BC\cap A_1B=B$，$BC, A_1B\subset$ 平面 A_1BC，

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BC，

又 $A_1C\subset$ 平面 A_1BC，所以 $AC_1\perp A_1C$，

所以四边形 AA_1C_1C 为菱形，边长为 2，

又因为 $A_1D\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1D\perp AC$，

又 D 为 AC 中点，所以 $A_1D=\sqrt{3}$，

$S_{菱形AA_1C_1C}=AC\cdot A_1D=2\sqrt{3}$，

由已知 $AC=BC=2$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，

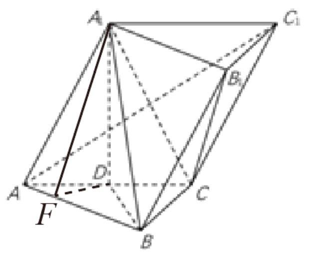
由（1）可知，$BC\perp$ 平面 AA_1C_1C，$CC_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BC\perp CC_1$，

所以 $S_{四边形BCC_1B_1}=BC\cdot CC_1=2\times2=4$，

如图，作 $DF\perp AB$ 于 F，连接 A_1F，

因为 $AC=BC=2$，$\angle ACB=90°$，

所以 $DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，



又因为 $A_1D\perp$ 平面 ABC，$AB, DF\subset$ 平面 ABC，

所以 $A_1D\perp AB$，$A_1D\perp DF$，

所以 $A_1F=\sqrt{A_1D^2+DF^2}=\sqrt{3+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

又 $DF\cap A_1D=D, DF, A_1D\subset$ 面 A_1DF，所以 $AB\perp$ 面 A_1DF，

又 $A_1F \subset$ 面 A_1DF，所以 $AB \perp A_1F$，

所以 $S_{四边形ABB_1A_1} = AB \cdot A_1F = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{14}$，

所以 $2S_{\triangle ABC} + S_{四边形BCC_1B_1} + S_{菱形AA_1C_1C} + S_{四边形ABB_1A_1} = 4 + 4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{14} = 8 + 2\sqrt{3} + \sqrt{14}$，

所以三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的表面积为 $8 + 2\sqrt{3} + \sqrt{14}$.

19.【答案】（1）$\frac{5}{6}$

（2）分布列见解析；$E(X) = \frac{22}{3}$

（3）$s \in (20, 22]$

【分析】（1）由票价统计图求票价小于 5 元的人数．从而利用古典概型即可得解；

（2）根据题意求得 X 的可能取值，再分别计算其概率，从而得解；

（3）分别计算花费 5 元乘坐公共电汽车与地铁的公里数，从而得解.

【小问 1 详解】

记事件 A 为“此人乘坐地铁的票价小于 5 元”，

由统计图知，得 120 人中票价为 3 元、4 元、5 元的人数分别为 60，40，20，

所以票价小于 5 元的有 $60 + 40 = 100$（人）

故 120 人中票价小于 5 元的概率是 $\frac{100}{120} = \frac{5}{6}$

故估计此人乘坐地铁的票价小于 5 元的概率 $P(A) = \frac{5}{6}$.

【小问 2 详解】

X 的所有可能取值为 6，7，8，9，10.

根据统计图，可知 120 人中地铁票价为 3 元、4 元、5 元的频率分别为 $\frac{60}{120}$，$\frac{40}{120}$，$\frac{20}{120}$，即 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，

以频率作为概率，知乘客地铁票价为 3 元、4 元、5 元的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$.

所以 $P(X=6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$，$P(X=7) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$，

$P(X=8) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$，$P(X=9) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$，

$P(X=10) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$，

所以随机变量 X 的分布列为：

X	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

所以$E(X)=6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{3}+8\times\frac{5}{18}+9\times\frac{1}{9}+10\times\frac{1}{36}=\frac{22}{3}$.

【小问 3 详解】

乘公共电汽车方案的里程：10 公里内（含)2 元，10 公里以上部分，每增加 1 元可乘坐 5 公里（含)；

则$10+5\times2<s<10+5\times3$，即$20<s<25$；

乘坐地铁的里程：12 公里至 22 公里（含)5 元，则$12\le s\le22$；

综上，$s\in$ 20,22 .

20. 【答案】(1) $x\in(0,\mathrm{e})$ 时单调递增，$x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，单调递减；

(2) $a\ge1$；

(3) 证明见解析.

【分析】(1) 求导，根据导数的符号确定单调区间；

(2) 运用参数分离的方法，构造函数求导，计算函数最大值即可；

(3) 作图，根据函数图像确定 x_1,x_2 的范围，再构造函数，利用函数的单调性证明.

【小问 1 详解】

$f'(x)=\frac{1}{a}\bullet\frac{1-\ln x}{x^2}$，显然有 $f'(\mathrm{e})=0$，当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，单调递增，

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，单调递减；

【小问 2 详解】

由 $\frac{\ln x}{ax}\le x-\frac{1}{a}$ 得：$ax^2-x-\ln x\ge0$，$a\ge\frac{x+\ln x}{x^2}$，

令 $g(x)=\frac{x+\ln x}{x^2}$，则有 $g'(x)=\frac{-x-2\ln x+1}{x^3}$，令 $k(x)=-x-2\ln x+1$，

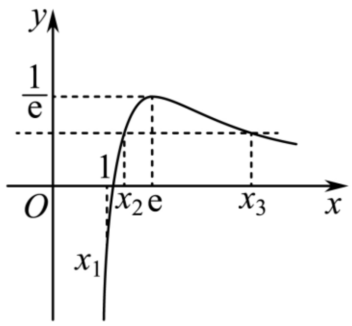
显然 $k(x)$ 是减函数，$k(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$k(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(1,+\infty)$ 时，

$k(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

$\therefore$ $g(x)_{\max}=g(1)=1$，a 的取值范围是 $a\ge1$；

【小问 3 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，由（1）的结论作函数图像如下：



$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，

对于 $x_1\ln x_2+x_2\ln x_1=0$，得 $-\frac{\ln x_1}{x_2}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，不妨设 $x_2>x_1$，则有 $-f(x_1)=f(x_2)$，

由图可知当 $0<f(x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，对应的自变量有 2 个值 x_2,x_3，其中 $x_3>\mathrm{e},1<x_2<\mathrm{e}$，

要证明 $x_1+x_2>2$，只需 x_2 取 x_2,x_3 中较小的数 x_2 即可，

$\because 0<f(x_2)<\frac{1}{\mathrm{e}}$，$\therefore -\frac{1}{\mathrm{e}}<f(x_1)<0$，$x_1\in(0,1)$，$2-x_1\in(1,2)$，

要证明 $x_1+x_2>2$，只需证明 $x_2>2-x_1$，在 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore$ 只需证明 $f(x_2)>f(2-x_1)$，$\because f(x_2)=-f(x_1)$，$\therefore$ 只需证明 $-f(x_1)>f(2-x_1)$，

即 $f(x_1)+f(2-x_1)<0$，构造函数 $p(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(2-x)}{2-x}(x\in(0,1))$，

$$p'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{-1+\ln(2-x)}{(2-x)^2}=\frac{x^2\ln(2-x)-(2-x)^2\ln x+4(1-x)}{x^2(2-x)^2}，$$

$\because x\in(0,1),\therefore 2-x\in(1,2),x^2\ln(2-x)>0,-(2-x)^2\ln x>0,4(1-x)>0$，

$p'(x)>0$，$p(x)$ 是增函数，又 $p(1)=0,\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$p(x)<0$，

即 $f(x_1)+f(2-x_1)<0$，命题得证；

综上，（1）当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，单调递增，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，单调递减；（2）$a\geq1$.

【点睛】本题的难点是第三问，根据函数的图像确定 x_1 和 x_2 的范围，再将原问题转化为函数的单调性问题.

21.【答案】（1）$a=3$

（2）证明见解析　（3）9

【分析】（1）利用①推出 a 的范围．利用②求解 a 的值即可；

（2）利用反证法：假设 2，3，5 是数列 A_n 中的项，利用已知条件②①，推出 $a_{n-2}=a_{n-3}$ 得到矛盾结果.

（3）n 的最大值为 9，一、令 A_9：$-4,-2,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{2},1,2$，则 A_9 符合①②，二、设 A_n：a_1，a_2，…，a_n（$n\geq 3$）符合①②，(i) A_n 中至多有三项，其绝对值大于 1．

利用反证法证明假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于 1，不正确；(ii) A_n 中至多有三项，其绝对值大于 0 且小于 1．利用反证法推出矛盾结论、(iii) A_n 中至多有两项绝对值等于 1．(iv) A_n 中至多有一项等于 0．推出 n 的最大值为 9．

【小问 1 详解】

由①得：$2<a<6$，

由②得：当 $i=2$，$j=3$，$k=4$ 时，$2a$，$6a$，12 中至少有一个是数列 1，2，a，6 中的项，但 $6a>6$，$12>6$，故 $2a=6$，解得：$a=3$，

经检验，当 $a=3$ 时，符合题意，

【小问 2 详解】

假设 2，3，5 是数列 A_n 中的项，由②可知：6，10，15 中至少有一个是数列 A_n 中的项，则有限数列 A_n 的最后一项 $a_n>5$，且 $n\geq 4$，

由①，$a_n>a_{n-1}>a_{n-2}>a_{n-3}>1$，

对于数 a_{n-2}，a_{n-1}，a_n 由②可知：$a_{n-2}a_{n-1}=a_n$，

对于数 a_{n-3}，a_{n-1}，a_n，由②可知：$a_{n-3}a_{n-1}=a_n$，

所以 $a_{n-2}=a_{n-3}$，这与①矛盾．

所以 2，3，5 不可能是数列 A_n 中的项．

【小问 3 详解】

n 的最大值为 9，证明如下：

一、令 A_9：$-4,-2,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0,\frac{1}{2},1,2$，则 A_9 符合①②，

二、设 A_n：a_1，a_2，…，a_n（$n\geq 3$）符合①②，则：

(i) A_n 中至多有三项，其绝对值大于 1．

假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于 1，不妨设 a_i，a_j，a_k，a_l 是 A_n 中绝对值最大的四项，其中 $1<|a_i|\leq|a_j|\leq|a_k|\leq|a_l|$，则对 a_i，a_k，a_l 有 $|a_ia_l|>|a_l|$，$|a_ka_l|>|a_l|$，故 a_ia_l，a_ka_l 均不是数列 A_n 中的项，即 a_ia_k 是数列 A_n 中的项，

同理：a_ja_k 也是数列 A_n 中的项．但 $|a_ia_k|>|a_k|$，$|a_ja_k|>|a_k|$，

所以 $a_ia_k=a_ja_k=a_l$，所以 $a_i=a_j$，这与①矛盾．

(ii) A_n 中至多有三项，其绝对值大于 0 且小于 1，

假设 A_n 中至少有四项，其绝对值大于0且小于1，类似（i）得出矛盾，

（iii） A_n 中至多有两项绝对值等于1.

（iv） A_n 中至多有一项等于 0.

综合（i），（ii），（iii），（iv）可知 A_n 中至多有9项，

由一、二可得，n 的最大值为9.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

微信搜一搜

京考一点通