2023 北京日坛中学高一（上）期中

数　　学

2023.11

（本试卷共 4 页， 考试时间 120min，满分 150 分）

命题人：赵青　复核人：贾卓琴 侯立俊

一、选择题：每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）设集合 $A=\{x\mid -1<x<2\},B=\{0,1,2\}$ ，则 $A\cap B=$（　　）

（A）$\{0\}$　　（B）$\{0,1\}$　　（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{-1,0,1,2\}$

（2）已知命题 $p:\forall x<-1,x^2>1$，则 $\neg p$ 是（　　）

（A）$\exists x<-1,x^2\le 1$　　（B）$\forall x\ge -1,x^2>1$

（C）$\forall x<-1,x^2>1$．　　（D）$\exists x\le -1,x^2\le 1$．

（3） 下列函数中，是奇函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

（A）$y=-x^2$　　（B）$y=x^{\frac{1}{2}}$　　（C）$y=\log_{0.5}x$　　（D）$y=x^{-1}$

（4）若 $a>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）

（A）$a^2>b^2$　　（B）$2^a>2^b$　　（C）$a^{\frac{1}{2}}>b^{\frac{1}{2}}$　　（D）$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

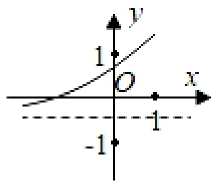
（5）已知 $a,b\in\mathbf{R}$，则“$a>b$”是“$\frac{a}{b}>1$”的（　　）

（A）充分而不必要条件（B）必要而不充分条件（C）充分必要条件（D）既不充分也不必要条件

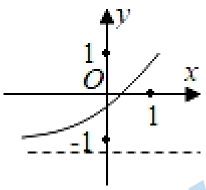
（6）已知 $a>2$，则 $a+\frac{4}{a-2}$ 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,2)$　　（B）$[2,+\infty)$　　（C）$[4,+\infty)$　　（D）$[6,+\infty)$

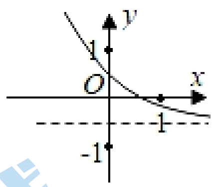
（7）已知函数 $f(x)=ax+b$ 的图象如图所示，则函数 $g(x)=a^x+b$ 的图象可能是（　　）



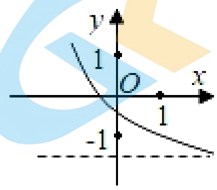
（A）



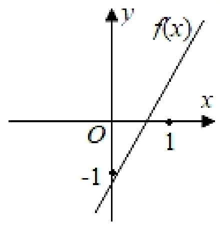
（B）



（C）



（D）



（8）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\le 0\\ \frac{1}{x}-1, & x>0\end{cases}$，则满足 $f(x)=0$ 的 x 的个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（9）区块链作为一种革新的技术，已经被应用于许多领域，包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等. 在区块链技术中，若密码的长度设定为 256 比特，则密码一共有 2^{256} 种可能，因此，为了破解密码，最坏情况需要进行 2^{256} 次哈希运算. 现在有一台机器，每秒能进行 2.5×10^{11} 次哈希运算，假设机器一直正常运转，那么在最坏情况下，这台机器破译密码所需时间大约为（　　）

（参考数据 $\lg 2\approx 0.3010, \lg 3\approx 0.477$）

（A） 4.5×10^{73} 秒　　（B） 4.5×10^{65} 秒　　（C） 4.5×10^{7} 秒　　（D） 28 秒

（10）已知正整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ 满足当 $i<j$ （$i, j\in \mathbf{N}^*$）时，$x_i<x_j$，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2\le 2020$，则 $x_9-(x_1+x_2+x_3+x_4)$ 的最大值为（　　）

（A）19　　（B）20　　（C）21　　（D）22

二、填空题：共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（11）函数 $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是______.

（12）若幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 图象过点 $(3,\sqrt{3})$，则 $f(9)$ 的值为___.

（13）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\ge 1,\\ 2^x, & x<1.\end{cases}$ 则 $f(-2)=$__；若 $f(t)\ge\dfrac{1}{2}$，则实数 t 的取值范围____.

（14）函数 $f(x)$ 的定义域为 D，给出下列两个条件：

① 对于 $x_1, x_2\in D$，当 $x_1\ne x_2$ 时，总有 $f(x_1)\ne f(x_2)$；

② $f(x)$ 在定义域内不是单调函数.

请写出一个同时满足条件①②的函数 $f(x)$，则 $f(x)=$_________.

（15）已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-a\ (a\in\mathbf{R})$，$g(x)=-x^2+4x+3$，在同一平面直角坐标系里，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象在 y 轴右侧有两个交点，则实数 a 的取值范围是______.

（16）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. 关于 $f(x)$ 的性质，有以下四个推断：

① $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid x\ne\pm 1\}$；　② $f(x)$ 是奇函数；

③ $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增；　④ $f(x)$ 的值域是 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

其中推断正确的是 _______.

三、解答题：共 5 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（17）（本小题 15 分）

已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid 2a<x<a+2\}$，$B=\{x\mid 2<2^x<16\}$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求 $A\cup B$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$；

（Ⅱ）若 $A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

（18）（本小题 17 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

（Ⅰ）用定义证明 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数；

（Ⅱ）求该函数在区间 $[2,4]$ 上的最大值与最小值；

（Ⅲ）直接写出函数的值域（不需要写解答过程）.

（19）（本小题 18 分）

已知函数 $f(x)=x^2-2ax-3$.

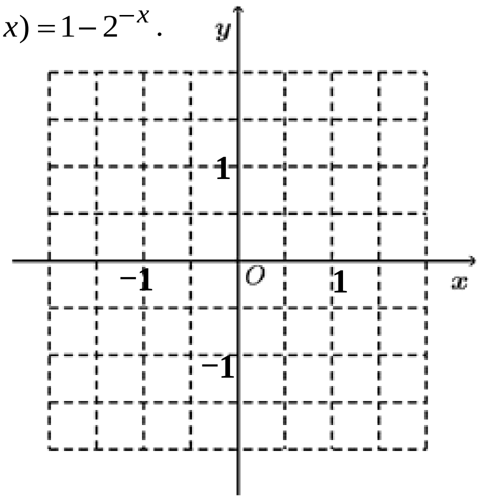
（Ⅰ）若 $a=1$，求不等式 $f(x)\ge 0$ 的解集；

（Ⅱ）已知 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）求 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最小值.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=1-2^{-x}$.



（Ⅰ）作出函数 $f\left(x\right)$ 的图象；

（Ⅱ）直接写出 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅲ）若函数 $f\left(x\right)$ 是定义域为(-3,3),

求不等式 $f\left(2x-3\right)+f\left(x+2\right)>0$ 的解集.

（21）(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)$ 的图象在定义域 $(0,+\infty)$ 上连续不断. 若存在常数 $T>0$，使得对于任意的 $x>0$，$f(Tx)=f(x)+T$ 恒成立，称函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 满足性质 $P(2)$，且 $f(1)=0$，求 $f(4)+f(\frac{1}{4})$ 的值；

(Ⅱ)若 $f(x)=\log_{1.2}x$，试说明至少存在两个不等的正数 T_1,T_2，同时使得函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T_1)$ 和 $P(T_2)$.（参考数据：$1.2^4=2.0736$）

(Ⅲ)若函数 $f(x)$ 满足性质 $P(T)$，求证：函数 $f(x)$ 存在零点.

参考答案

一、单项选择题： B A D B D　D B C B A

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）$[0,1)\cup(1,+\infty)$　（12）3　（13）$\frac{1}{4}$；$[-1,2]$

（14）$\frac{1}{x}$（答案不唯一）　（15）$\{a|a>-3\}$　（16）②③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（17）（15 分）

（Ⅰ）$a=1$时，$A=(2,3)$，$B=(1,4)$，$\complement_R A=(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

$$A\cup B=(1,4)，(\complement_R A)\cap B=(1,2]\cup[3,4)$$

（Ⅱ）$A\cup B=B$，$A\subseteq B$

① $A=\Phi$，$2a\geq a+2$　$\therefore a\geq 2$

② $A\neq\Phi$，$\begin{cases}2a<a+2\\2a\geq 1\\a+2\leq 4\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}a<2\\a\geq\frac{1}{2}\\a\leq 2\end{cases}$ $\therefore \frac{1}{2}\leq a<2$

综上：a 取值范围是$[\frac{1}{2},+\infty)$

（18）（15 分）

（Ⅰ）任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1+1}{x_1+1}-\dfrac{2x_2+1}{x_2+1}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0,(x_1+1)(x_2+1)>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

故函数 $f(x)$ 在区间$[1,+\infty)$上是增函数.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知函数 $f(x)$ 在区间$[2,4]$上是增函数，

所以 $f(x)_{max}=f(4)=\dfrac{2\times4+1}{4+1}=\dfrac{9}{5}$， $f(x)_{min}=f(2)=\dfrac{2\times2+1}{2+1}=\dfrac{5}{3}$.

（Ⅲ）由题意，函数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-1}{x+1}=2+\dfrac{-1}{x+1}$，

因为$-\dfrac{1}{x+1}\neq 0$，所以$-\dfrac{1}{x+1}+2\neq 2$，

所以 $f(x)$ 的值域为$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

（19）（15 分）

（Ⅰ）$x^2-2x-3\geq 0$，$\therefore x\leq -1或x\geq 3$，$A=\{x\,|\,x\leq -1或x\geq 3\}$

（Ⅱ）对称轴 $x=a$， $a\le 3$， $\therefore a$ 取值范围 $(-\infty,3]$

（Ⅲ）①当 $a\le -1$ 时， $f(x)_{\min}=f(-1)=2a-2$；

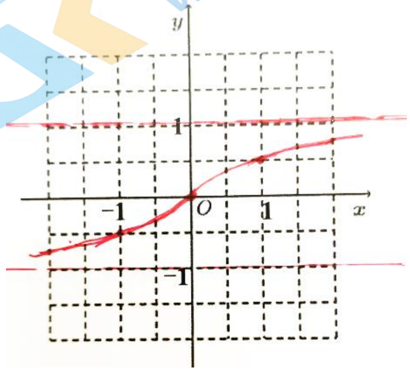
②当 $-1<a<2$ 时， $f(x)_{\min}=f(a)=-a^2-3$；

③当 $a\ge 2$ 时， $f(x)_{\min}=f(2)=1-4a$.

综上：略

（20）（13 分）

（Ⅰ）见右图



（Ⅱ）$f(x)$的递增区间为$(-\infty,+\infty)$，无递减区间.

（Ⅲ）$\because f(2x-3)+f(x+2)>0$

$\therefore f(2x-3)>-f(x+2)$ $\therefore f(2x-3)>f(-x-2)$

$\therefore 2x-3>-x-2$ $\therefore x>\frac{1}{3}$ 所有不等式解集为 $(\frac{1}{3},+\infty)$

（21）（13 分）

（Ⅰ）因为 $f(x)$ 满足性质 $P(2)$，

所以对于任意的 $x>0$， $f(2x)=f(x)+2$ 恒成立.

又因为 $f(1)=0$，

所以， $f(2)=f(1)+2=2$， ....1 分

$f(4)=f(2)+2=4$， ....2 分

由 $f(1)=f(\frac{1}{2})+2$ 可得 $f(\frac{1}{2})=f(1)-2=-2$，

由 $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})+2$ 可得 $f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})-2=-4$， ....3 分

所以， $f(4)+f(\frac{1}{4})=0$ . ...4 分

（Ⅱ）若正数 T 满足 $\log_{1.2}(Tx)=\log_{1.2}x+T$， 等价于 $\log_{1.2}T=T$ （或者 $1.2^T=T$），

记 $g(x)=x-\log_{1.2}x$，（或者设 $g(x)=1.2^x-x$，$x\in(0,+\infty)$） ....5 分

显然 $g(1)>0$， $g(2)=2-\log_{1.2}2=\log_{1.2}1.44-\log_{1.2}2<0$，

因为 $1.2^4>2$， 所以 $1.2^{16}>16$， $16>\log_{1.2}16$， 即 $g(16)>0$ . ...6 分

因为 $g(x)$ 的图像连续不断，

所以存在 $T\in(1,2)_1$，$T_2\in(2,16)$， 使得 $g(T_1)=g(T_2)=0$，

因此，至少存在两个不等的正数 T_1，T_2， 使得函数 $f(x)$ 同时满足性质 $P(T_1)$ 和 $P(T_2)$ . ...7 分

（Ⅲ）① 若 $f(1)=0$，则 1 即为 $f(x)$ 的零点； ....8 分

② 若 $f(1)=M<0$，则 $f(T)=f(1)+T$， $f(T^2)=f(T)+T=f(1)+2T$， $\cdots$，

可得 $f(T^k)=f(T^{k-1})+T=f(1)+kT$，其中 $k\in\mathbf{N}_+$.

取 $k=[\frac{-M}{T}]+1>-\frac{M}{T}$ 即可使得 $f(T^k)=M+kT>0$.

所以， $f(x)$ 存在零点. ....9 分

③ 若 $f(1)=M>0$， 则由 $f(1)=f(\frac{1}{T})+T$， 可得 $f(\frac{1}{T})=f(1)-T$，

由 $f(\frac{1}{T})=f(\frac{1}{T^2})+T$， 可得 $f(\frac{1}{T^2})=f(\frac{1}{T})-T=f(1)-2T$， $\cdots$，

由 $f(\frac{1}{T^{k-1}})=f(\frac{1}{T^{k}})+T$，可得 $f(\frac{1}{T^{k}})=f(\frac{1}{T^{k-1}})-T=f(1)-kT$，其中$k\in\mathbf{N}_{+}$.

取 $k=[\frac{M}{T}]+1>\frac{M}{T}$ 即可使得 $f(\frac{1}{T^{k}})=M-kT<0$. 所以，$f(x)$ 存在零点.

综上，$f(x)$ 存在零点. ....10 分

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！