2024 年高考数学仿真模拟卷(三)（新高考专用）

解析

(时间：120 分钟　满分：150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.答案　D

解析　因为集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|0<x\leqslant 2\}$，所以 $A\cup B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$．

2.答案　D

解析　由 $\frac{z}{i}=\frac{3-i}{1-i}=\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i$，则 $z=2i-1$，所以 z 的虚部为 2.

3.答案　B

解析　若等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，可得 $a_1<a_3<a_5$ 一定成立；反之，例如数列 $\{(-1)^{n+1}2^n\}$，此时满足 $a_1<a_3<a_5$，但数列 $\{a_n\}$ 不是递增数列，所以“$a_1<a_3<a_5$”是“数列 $\{a_n\}$ 是递增数列”的必要不充分条件．

4.答案　B

解析　因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=10$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=20-4-2=14$.

5.答案　B

解析　若每名大学生只去一个学校，每个学校至少去 1 名，则不同的安排方法有 $C_4^2A_3^3=36$(种)，若甲、乙安排在同一所学校，则不同的安排方法有 $A_3^3=6$(种)，

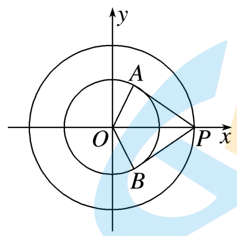
因为甲、乙不能安排在同一所学校，则不同的安排方法有 $36-6=30$(种)．

6.答案　C

解析　取圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点 P，过 P 作圆 O：$x^2+y^2=m^2(m>0)$的两条切线 PA，PB，

当 $\angle APB=\frac{\pi}{3}$时，$\angle APO=\frac{\pi}{6}$且 $OA\perp AP$，$|OP|=2$；

则$|OA|=\frac{1}{2}|OP|=1$，所以实数 $m=|OA|=1$.

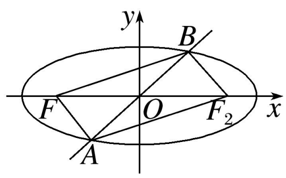


7.答案　A

解析　设椭圆的右焦点为 F_2，连接 AF_2，BF_2，故四边形 $AFBF_2$ 为平行四边形，

设$|AF|=m$，$\angle FAB=90°$，$\angle ABF=30°$，则$|FB|=2m$，$|BF_2|=|AF|=m$，

$|BF|+|BF_2|=2m+m=2a$，$m=\frac{2a}{3}$，



在$\triangle BFF_2$ 中，由余弦定理得$(2c)^2=\left(\frac{4a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2\times\frac{4a}{3}\times\frac{2a}{3}\times\cos 120°$，整理得 $4c^2=\frac{28a^2}{9}$，即 $c=\frac{\sqrt{7}a}{3}$，故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

8.答案　B

解析　将$\frac{1}{4}$用变量 x 替代，则 $a=\sin x$，$b=e^x-1$，$c=\ln(x+1)$，$x\in(0,1)$，

令 $f(x)=\sin x-\ln(x+1)$，则 $f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，

令 $g(x)=f'(x)=\cos x-\dfrac{1}{x+1}$，则 $g'(x)=-\sin x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$，易知 $g'(x)$在$(0,1)$上单调递减，

且 $g'(0)=1>0$，$g'(1)=\dfrac{1}{4}-\sin 1<0$，$\therefore \exists x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(0，x_0)$时，$g'(x)>0$，$f'(x)$单调递增；当 $x\in(x_0,1)$时，$g'(x)<0$，$f'(x)$单调递减.

又 $f'(0)=0$，$f'(1)=\cos 1-\dfrac{1}{2}>0$，$\therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore f(x)>f(0)=0$，即 $\sin x>\ln(x+1)$，$\therefore a>c$，

记 $h(x)=e^x-(\sin x+1)$，$x\in(0,1)$，则 $h'(x)=e^x-\cos x>0$，$\therefore h(x)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore h(x)>h(0)=0$，即 $e^x-1>\sin x$，$\therefore b>a$，

综上，$b>a>c$.

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案　BC

解析　对于 A，由题图知，2023 年 1 月 22 日至 1 月 28 日的高速公路车流量的极差为 $27-3=24$，故 A 错误；

对于 B，易知 2023 年 1 月 22 日至 1 月 28 日的高速公路车流量的中位数为 18，故 B 正确；

对于 C,2023 年 1 月 23 日，1 月 26 日，1 月 27 日，1 月 28 日这 4 天的同比增长率均大于 0，所以 2023 年 1 月 22 日至 1 月 28 日的高速公路车流量比 2022 年 12 月 22 日至 12 月 28 日高速公路车流量大的有 4 天，故 C 正确；

对于 D,2023 年 1 月 25 日的高速公路车流量为 18 万车次，同比增长率为-10%，设 2022 年 12 月 25 日的高速公路车流量为 x 万车次，则$\dfrac{18-x}{x}=-10\%$，解得 $x=20$，故 D 错误.

10.答案　ACD

解析　对于 A，由 A，B 是互斥事件，故 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.5+0.3=0.8$，正确.

对于 B，由$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$知，$P(\overline{A}+\overline{B})=1-P(AB)=1-0=1$，错误.

对于 C，由于 A，B 是相互独立事件，$P(AB)=P(A)P(B)$，

$\therefore P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.3-0.5\times0.3=0.65$，正确.

对于 D，$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5$，则 $P(AB)=0.25$，$\therefore P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{0.3-0.25}{1-0.5}=0.1$，正确.

11.答案　BD

解析　对于 A，由 $f(x)+g(x)=2$，令 $x=0$ 可得 $f(0)+g(0)=2$，

又 $g(x)$为奇函数，故 $g(0)=0$，$f(0)=2$，故 A 错误；

对于 B，由 $f(x)+g(x)=2$ 及 $f(x)+g(x-2)=2$ 可得 $g(x)=g(x-2)$，

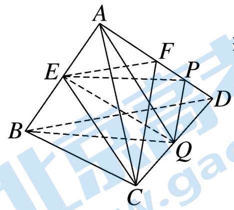
又 $g(x)$为奇函数，则 $g(x)=-g(-x)=g(x-2)$，令 $x=1$，则 $g(1)=-g(-1)=g(-1)$，故 $g(1)=g(-1)=0$，故 B 正确；

对于 C，由 $f(x)+g(x)=2$ 及 $g(1)=0$ 可得 $f(1)=2$，当 $n=1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)=0$ 不成立，故 C 错误；

对于 D，由 A，B 可得 $g(0)=g(1)=0$ 且 $g(x)$周期为 2，故 $g(i)=0(i\in\mathbf{N}^*)$，故$\sum\limits_{i=1}^{n}g(i)=0$，故 D 正确.

12.答案　ABD

解析　由题知，$BD\,/\!/$ 平面 CEF，而平面 $CEF\cap$ 平面 $ABD=EF$，$BD\subset$ 平面 ABD，质定理可知，



$BD\,/\!/\,EF$，

又 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times2\times\cos\dfrac{2\pi}{3}+2\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=0$，

即 $AC\perp BD$，故 $AC\perp EF$，A 正确；

连接 AQ，BQ，易得 $AQ=BQ=\sqrt{3}=CF$，又 $AE=EB=1$，于是 $EQ\perp AB$(三线合一)，故 $EQ=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$，

取 FD 的中点 P，连接 PQ，PE，由中位线可知 $PQ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

在△AEP 中由余弦定理，得 $EP^2=AE^2+AP^2-2AE\cdot AP\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7}{4}$，即 $EP=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，由 $CF\,/\!/\,PQ$，CF 与 EQ 所成角即为

$\angle EQP$(或其补角)，在△EQP 中根据余弦定理，得 $\cos\angle EQP=\dfrac{2+\frac{3}{4}-\frac{7}{4}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，B 正确；

根据 B 选项分析，当 E，Q 分别为线段 AB，CD 的中点时，$EQ=\sqrt{2}<\sqrt{3}$，C 错误；

由 $BD\,/\!/\,EF$，△ABD 为正三角形，则△AEF 也是正三角形，

故 $EF=AE$，故四边形 $BCFE$ 的周长为 $BC+BE+EF+CF=2+(BE+AE)+CF=4+CF$，

当 F 为 AD 的中点，即 $CF\perp AD$ 时，CF 有最小值 $\sqrt{3}$.即空间四边形 $BCFE$ 的周长的最小值为 $4+\sqrt{3}$，D 正确.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．答案　240

解析　因为 $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=(-2)^kC_6^kx^{6-\frac{3}{2}k}$，令 $6-\dfrac{3}{2}k=0$，解得 $k=4$.

所以 $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的常数项是 $T_5=(-2)^4C_6^4=240$.

14.答案　1 或 7

解析　设正四棱台的外接球的半径为 R，则 $4\pi R^2=100\pi$，解得 $R=5$，

连接 AC，BD 相交于点 E，连接 A_1C_1，B_1D_1 相交于点 F，连接 EF，

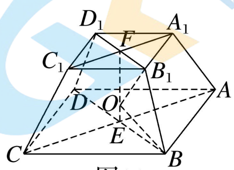
则球心 O 在直线 EF 上，连接 OB，OB_1，

如图(1)，当球心 O 在线段 EF 上时，则 $OB=OB_1=R=5$，

因为上、下底面边长分别为 $3\sqrt{2}$，$4\sqrt{2}$，所以 $BE=4$，$B_1F=3$，

由勾股定理得 $OF=\sqrt{OB_1^2-B_1F^2}=4$，$OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=3$，

此时该正四棱台的高为 $3+4=7$；

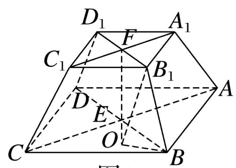


图(1)

如图(2)，当球心 O 在 FE 的延长线上时，

同理可得 $OF=\sqrt{OB_1^2-B_1F^2}=4$，$OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=3$，

此时该正四棱台的高为 $4-3=1$.



图(2)

15.答案　$\dfrac{5\pi}{12}$

解析　因为 $f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$，所以 $f(x)=2\left(\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)=2\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

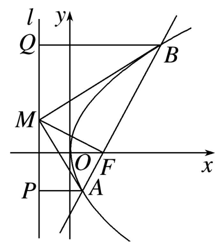
因为 $f(x)$ 的零点是以 $\frac{\pi}{2}$ 为公差的等差数列，所以函数周期为π，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$；

当 $x\in[0,\ m]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\ 2m-\frac{\pi}{3}\right]$，因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\ m]$ 上单调递增，所以 $2m-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，解得 $m\leqslant\frac{5\pi}{12}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$.

16.答案　1

解析　如图所示，



因为 $MF\perp AB$，所以 MA 为△MAF 外接圆的直径，MB 为△MBF 外接圆的直径，

所以 $AP\perp l$，$BQ\perp l$，

由抛物线的定义得 $|AP|=|AF|$，$|BQ|=|BF|$，

则 $\angle BMQ=\angle BMF$，$\angle AMP=\angle AMF$，所以 $\angle MAP=\angle BMQ$，$\angle AMP=\angle MBQ$，

所以 Rt△AMP∽Rt△MBQ，则 $\frac{|MP|}{|BQ|}=\frac{|AP|}{|MQ|}$，

所以 $\frac{|MP|\cdot|MQ|}{|AF|\cdot|BF|}=\frac{|MP|}{|AP|}\cdot\frac{|MQ|}{|BQ|}=\frac{|MP|}{|BQ|}\cdot\frac{|MQ|}{|AP|}=1$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．**解**　(1)因为 $b\cos C+\sqrt{3}c\sin B=a+c$，

由正弦定理可得 $\sin B\cos C+\sqrt{3}\sin C\sin B=\sin A+\sin C=\sin(\pi-B-C)+\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C+\sin C$，

即 $\sqrt{3}\sin C\sin B=\cos B\sin C+\sin C$，

又 $C\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin C\neq0$，故 $\sqrt{3}\sin B=\cos B+1$，即 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$，所以 $2\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

又 $B-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得 $a=2R\sin A$，$c=2R\sin C$，

所以 $a-c=2R(\sin A-\sin C)=2R\left[\sin A-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=2R\left(\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=2R\left(\frac{1}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)=2R\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=2$，①

又因为△ABC 为钝角三角形，且 $a-c=2>0$，又由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{2}<A<\frac{2\pi}{3}$，

所以 $A-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，又由①式可知，$R=\frac{1}{\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)}$，

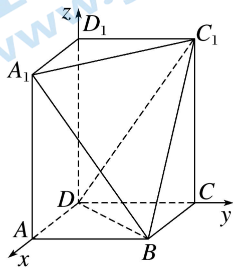
所以 $R\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 2\right)$.

18．**解**　(1)设 $A_1A=h$，由题设 $V_{几何体ABCD-A_1C_1D_1}=V_{长方体ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{三棱锥B-A_1B_1C_1}=10$，

即 $S_{四边形ABCD}\times h-\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1C_1}\times h=10$，即 $2\times2\times h-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times h=10$，解得 $h=3$，

故 A_1A 的长为 3.

(2)以点 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在的直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



由已知及(1)可知 $D(0,0,0)$，$A_1(2,0,3)$，$B(2,2,0)$，$C_1(0,2,3)$，

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(u, v, w)$，有 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{A_1B}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{C_1B}$，

其中 $\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-3)$，$\overrightarrow{C_1B}=(2,0,-3)$，则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2v-3w=0,\\ 2u-3w=0,\end{cases}$

取 $w=2$，得平面 A_1BC_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(3,3,2)$；

设平面 BC_1D 的法向量为 $\boldsymbol{n}'=(x, y, z)$，

有 $\boldsymbol{n}'\perp\overrightarrow{BC_1}$，$\boldsymbol{n}'\perp\overrightarrow{BD}$，其中 $\overrightarrow{BC_1}=(-2,0,3)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}'\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\\ \boldsymbol{n}'\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+3z=0,\\ 2x+2y=0,\end{cases}$

取 $z=1$，得平面 BC_1D 的一个法向量 $\boldsymbol{n}'=\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\right)$，

故 $|\cos\langle\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}'|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}'|}=\frac{2}{\sqrt{22}\cdot\frac{\sqrt{22}}{2}}=\frac{2}{11}$，

则平面 A_1BC_1 和平面 BC_1D 夹角的余弦值为 $\frac{2}{11}$.

19．**解**　(1)由散点图可以看出样本点都集中在一条直线附近，由此推断两个变量线性相关．

因为 $\bar{t}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{t}\right)^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2=10$，

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{t}\right)\left(w_i-\bar{w}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{t}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{5}\left(w_i-\bar{w}\right)^2}}=\frac{27.2}{\sqrt{10\times76.9}}=\frac{27.2}{\sqrt{769}}\approx\frac{27.2}{27.7}\approx0.98$，

所以这两个变量正线性相关，且相关程度很强．

(2)①$Q=\sum\limits_{i=1}^{n}e_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-bx_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i^2-2bx_iy_i+b^2x_i^2)=b^2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2b\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2$，

要使 Q 取得最小值，当且仅当 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.

②由①知 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i}{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{t}\right)\left(w_i-\bar{w}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{5}\left(t_i-\bar{t}\right)^2}=\frac{27.2}{10}=2.72$，

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $y=2.72x$，又 $\overline{w}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}w_i}{5}=\dfrac{60.8}{5}=12.16$，

所以当 $t=7$ 时，则 $x=7-3=4$，$w=y+\overline{w}=2.72\times 4+12.16=23.04$，

所以预测 2024 年移动物联网连接数为 23.04 亿户．

20．**解**　(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

$\because\begin{cases}a_3=5,\\S_9=81,\end{cases}$　即 $\begin{cases}a_1+2d=5,\\9a_1+\dfrac{9\times 8}{2}d=81,\end{cases}$　$\therefore a_1=1$，$d=2$，$\therefore a_n=2n-1$.

$\because a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n=(n-1)\cdot 3^{n+1}+3$，①

$\therefore a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=(n-2)\cdot 3^n+3(n\geqslant 2)$，②

$\therefore$①－②得 $a_nb_n=(2n-1)\cdot 3^n$，$\therefore b_n=3^n(n\geqslant 2)$．当 $n=1$ 时，$a_1b_1=3$，$b_1=3$，符合 $b_n=3^n$，

$\therefore b_n=3^n$.

(2)$T_{2n}=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{2n}$，依题有，

$T_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+\left(\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_4a_6}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}\right)$.

记 $T_{\text{奇}}=b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1}$，则 $T_{\text{奇}}=\dfrac{3(1-3^{2n})}{1-3^2}=\dfrac{3^{2n+1}-3}{8}$.

记 $T_{\text{偶}}=\dfrac{1}{a_2a_4}+\dfrac{1}{a_4a_6}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2n}a_{2n+2}}$，

则 $T_{\text{偶}}=\dfrac{1}{2d}\left[\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_4}\right)+\left(\dfrac{1}{a_4}-\dfrac{1}{a_6}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_{2n}}-\dfrac{1}{a_{2n+2}}\right)\right]=\dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_{2n+2}}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4n+3}\right)$.

$\therefore T_{2n}=\dfrac{3^{2n+1}-3}{8}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4n+3}\right)=\dfrac{3\cdot 9^n}{8}-\dfrac{1}{16n+12}-\dfrac{7}{24}$.

21．**解**　(1)由 F_1：$x^2+y^2+4x=0$，得 $(x+2)^2+y^2=4$，可知 $F_1(-2,0)$，其半径为 2，

由 F_2：$x^2+y^2-4x-12=0$，得 $(x-2)^2+y^2=16$，可知 $F_2(2,0)$，其半径为 4.

设动圆半径为 r，动圆圆心 M 到 F_1 的距离为 n，到 F_2 的距离为 m，则有

$\begin{cases}n+2=r,\\m+4=r\end{cases}$　$\Rightarrow n-m=2$ 或 $\begin{cases}n+r=2,\\m+r=4\end{cases}$　$\Rightarrow m-n=2$，即 $|n-m|=2=2a$，得 $a=1$，

又 $|F_1F_2|=4=2c>2a$，

所以动圆圆心 M 的轨迹是以 F_1，F_2 为焦点的双曲线，由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $b^2=3$，

所以动圆圆心 M 的轨迹方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)①当直线 l_1 的斜率存在时，由题意得 $k\neq 0$，设 l_1：$y=kx-2k$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

与双曲线联立 $\begin{cases}y=kx-2k,\\x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$　$\Rightarrow(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{3-k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4k^2-3}{3-k^2}$，

由于 l_1 交双曲线两个不同的交点，所以 $\begin{cases}3-k^2\neq 0,\\ \Delta=16k^4+4(3-k^2)(4k^2+3)=36k^2+36>0,\end{cases}$ 得 $k^2\neq 3$ 且 $k^2\neq 0$，

且 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{6(k^2+1)}{|3-k^2|}$，

设 l_2：$y=-\dfrac{1}{k}x+\dfrac{2}{k}$，即 $x+ky-2=0$，设圆 F_1 到直线 l_2 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|-2-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{k^2+1}}$，

因为 l_2 交圆 F_1 于 P，Q 两点，故 $d<2$，得 $k^2>3$，则 $|MN|=\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}$.

且 $|PQ|=2\sqrt{2^2-d^2}=4\sqrt{\dfrac{k^2-3}{k^2+1}}$，由题意可知 $MN\perp PQ$，

所以 $S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}=\dfrac{1}{2}\times|PQ|\times|MN|=12\sqrt{\dfrac{k^2+1}{k^2-3}}=12\sqrt{1+\dfrac{4}{k^2-3}}$，

因为 $k^2>3$，可得 $S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}>12$.

②当直线 l_1 的斜率不存在时，$|PQ|=4$，$|MN|=6$，所以 $S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 6=12$，

综上，$S_{\triangle PQM}+S_{\triangle PQN}\geqslant 12$.

22．**解** (1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-e(1+\ln x)(x\in(0,+\infty))$，$f'(x)=e^x-\dfrac{e}{x}$，

设 $\varphi(x)=e^x-\dfrac{e}{x}$，又 $\varphi'(x)=e^x+\dfrac{e}{x^2}>0$，$\therefore\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $f'(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

(2)**方法一** 对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=e^x-\dfrac{e^a}{x}=\dfrac{xe^x-e^a}{x}$，

令 $g(x)=xe^x-e^a$，则 $g'(x)=e^x+xe^x>0$，$\therefore g(x)=xe^x-e^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(0)=-e^a<0$，当 $x\to+\infty$ 时 $g(x)\to+\infty$，

故存在唯一正实数 x_0 使得 $x_0e^{x_0}=e^a$，

当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-e^a\ln x_0-e^a a$，

由 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，得 $f(x)_{\min}\geqslant 0$，由 $x_0e^{x_0}=e^a$ 得 $x_0+\ln x_0=a$，

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-x_0e^{x_0}(x_0+2\ln x_0)\geqslant 0$，$\therefore 1-x_0(x_0+2\ln x_0)\geqslant 0$，

$\therefore x_0(x_0+2\ln x_0)-1\leqslant 0$，$\therefore x_0+2\ln x_0-\dfrac{1}{x_0}\leqslant 0$，

设 $h(x)=x+2\ln x-\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ 恒成立，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，而 $h(1)=0$，

$\therefore 0<x_0\leqslant 1$，

又 $x_0+\ln x_0=a$ 且函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

故 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

方法二 同方法一得 $f(x)_{\min}=f(x_0)=e^{x_0}-e^a\ln x_0-e^a a$，

由 $x_0 e^{x_0} = e^a$ 得 $x_0 + \ln x_0 = a$，

$\therefore f(x)_{\min} = \dfrac{e^a}{x_0} - e^a \ln x_0 - e^a a = e^a\left(\dfrac{1}{x_0} - \ln x_0\right) - e^a a = e^a\left(\dfrac{1}{x_0} + x_0 - a\right) - e^a a$

$\geqslant e^a(2-a) - e^a a \geqslant 0$，当且仅当 $x_0 = 1$ 时等号成立，

$\therefore e^a(2-2a) \geqslant 0$，故 a 的取值范围为$(-\infty，1]$.