2023~2024 学年度第一学期四校联考（一）

数学试卷

命题学校：河源高级中学　　命题：陈富先、谢璇　　审题：颜贞

说明：本试卷共 4 页，22 道题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

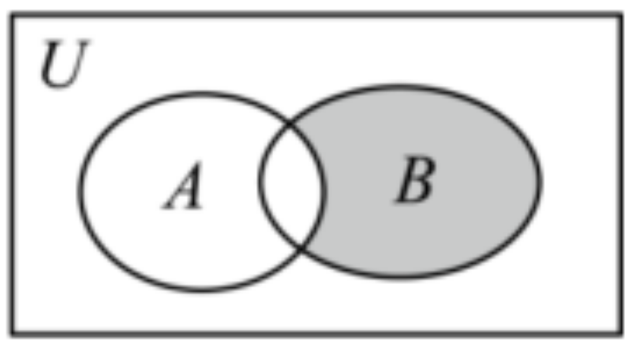
注意事项：1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，答案不能答在试卷上。

3. 非选择题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|x\geq 2$ 或 $x\leq -3\}$，$B=\{x|0\leq x\leq 4\}$，则 $Venn$ 图中阴影部分表示的集合为（　）



$A.[0,2)$　　$B.[0,3)$　　$C.(2,4]$　　$D.(3,4]$

2．函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x+2}$ 的单调递增区间是（　）

$A.(-\infty,1]$　　$B.[1,2]$　　$C.[\dfrac{3}{2},+\infty)$　　$D.(-\infty,\dfrac{3}{2}]$

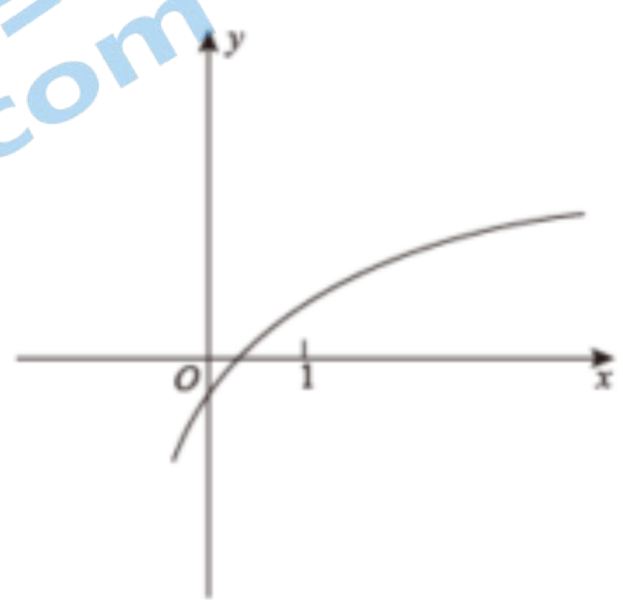
3．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_6，a_{18} 是方程 $x^2-8x-17=0$ 的两个根，则 $\{a_n\}$ 的前 23 项的和为（　）

$A.-184$　　$B.-92$　　$C.92$　　$D.184$

4．设命题甲：$\forall x\in R$，$x^2+2ax+1>0$ 是真命题；命题乙：函数 $y=\log_{2a-1}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减是真命题，那么甲是乙的（　　）

$A.$充分不必要条件　　$B.$必要不充分条件　　$C.$充要条件　　$D.$既不充分也不必要条件

5．已知函数 $f(x)=\log_a(x-b)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图像如图所示，则以下说法正确的是（　）



$A.\ a+b<0$　　$B.\ ab<-1$　　$C.\ 0<a^b<1$　　$D.\ \log_a|b|>0$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+5,(x\le 1)\\ \dfrac{a}{x},(x>1)\end{cases}$ 满足对任意实数 $x_1\ne x_2$，都有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ 成立，则 a 的取值范围是（　）

$A.\ 0<a\le 3$　　$B.\ a\ge 2$　　$C.\ a>0$　　$D.\ 2\le a\le 3$

7．若 $a=0.2^{0.2}$，$b=0.3^{0.3}$，$c=\log_{0.3}0.2$，则（　）

$A.\ a>b>c$　　$B.\ b>a>c$　　$C.\ c>a>b$　　$D.\ c>b>a$

8．设函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x,x\le 4,\\ \left|\log_2(x-4)\right|,x>4,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=t$ 有四个实根 x_1,x_2,x_3,x_4 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $x_1+x_2+4x_3+\dfrac{1}{4}x_4$ 的最小值为（　）

$A.\ \dfrac{45}{5}$　　$B.\ 23$　　$C.\ \dfrac{47}{2}$　　$D.\ 24$

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9．已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，且 $a_{n+1}=2a_n+1$，满足下列结论正确的是（　）

$A.$ 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列　　$B.$ 数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列

$C.\ a_n=2^n-1$　　$D.$ 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=2^n-n$

10．对任意两个实数 a,b，定义 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\le b\\ b,a>b\end{cases}$，若 $f(x)=4-x^2$，$g(x)=x^2$，下列关于函数 $F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 的说法正确的是（　）

$A.$ 函数 $F(x)$ 是偶函数　　$B.$ 方程 $F(x)=0$ 有三个解

$C.$ 函数 $F(x)$ 有 3 个单调区间　　$D.$ 函数 $F(x)$ 有最大值为 4，无最小值

11．定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(2-x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=2-x$，设函数 $g(x)=e^{-|x-2|}(-2<x<6)$，则正确的是（　）

$A.$ 函数 $f(x)$ 图像关于直线 $x=2$ 对称　　$B.$ 函数 $f(x)$ 的周期为 6

$C.\ f(7)=-1$　　$D.\ f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像所有交点横坐标之和等于 8

12. 已知函数 $f(x)=a^x(a>1)$，$g(x)=f(x)-f(-x)$，若 $x_1\neq x_2$，则（　）

A. $f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$　　B. $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1x_2)$

C. $x_1g(x_1)+x_2g(x_2)>x_1g(x_2)+x_2g(x_1)$　　D. $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $y=x+\sqrt{2x-1}$ 的值域为_____.

14. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-4x$，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为_____.

15. 已知函数 $f(x)=\lg(ax-3)$ 的图象经过定点 $(2,0)$，若 k 为正整数，那么使得不等式 $2f(x)>\lg(kx^2)$ 在区间 $[3,4]$ 上有解的 k 的最大值是_____.

16. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n+1$，前 8 项的和为 106，则 $a_1=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_9=4a_7$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_m=127$，求 m.

18.（本小题满分 12 分）

已知 a，b 为常数，且 $a\neq0$，$f(x)=ax^2+bx$，$f(2)=0$.

（1）若方程 $f(x)-x=0$ 有唯一实数根，求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2）当 $x\geq2, a>0$ 时，不等式 $f(x)\geq2-a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义域为 $(-1,1)$ 的奇函数，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$.

（1）求实数 a，b 的值；

（2）判断 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上的单调性，并用定义法证明；

（3）解不等式：$f(t-1)+f(t)<0$.

20. （本小题满分 12 分）

民族要复兴，乡村要振兴，合作社助力乡村产业振兴，农民专业合作社已成为新型农业经营主体和现代农业建设的中坚力量，为实施乡村振兴战略作出了巨大的贡献.某农民专业合作社为某品牌服装进行代加工，已知代加工该品牌服装每年需投入固定成本 30 万元，每代加工 x 万件该品牌服装，需另投入 $f(x)$ 万元，且 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x,0<x\le 10,\\ 14x+\frac{450}{x}-115,10<x\le 50.\end{cases}$ 根据市场行情，该农民专业合作社为这一品牌服装每代加工一件服装，可获得 12 元的代加工费.

（1）求该农民专业合作社为这一品牌服装代加工费的年利润 y（单位：万元）关于年代加工量 x（单位：万件）的函数解析式；

（2）当年代加工量为多少万件时，该农民专业合作社为这一品牌服装代加工费的年利润最大?并求出年利润的最大值.

21.（本小题满分 12 分）

在人教版高中数学教材选择性必修三中，我们探究过“杨辉三角”（如下图所示）所蕴含的二项式系数性质，也了解到在我国古代，杨辉三角是解决很多数学问题的有力工具。

（1）把“杨辉三角”中第三斜列各数取出，并按原来的顺序排列可得一数列 $\{a_n\}$：1，3，6，10，15，……，请写出 a_n 与 a_{n-1}（$n\in N^*$，$n\ge 2$）的递推关系，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{a_n}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$，$n\in N^*$，证明：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<2$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-x$，$g(x)=a\ln x-x^2+1$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小值；

（2）若 $g(x)\le 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的值；

（3）证明：$e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2022}}>2023$（其中 e 是自然对数的底数）.

2023~2024 学年第一学期四校联考（一）参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	B	C	D	C	B	BC	AB	AD	AC

13. $[\frac{1}{2},+\infty)$　　14. $(-4,0)\cup(0,4)$　　15. 1　　16. 8

部分试题答案详解

5. C

【详解】由图象可知 $f(x)$ 在定义域内单调递增，所以 $a>1$，

令 $f(x)=\log_a(x-b)=0$，即 $x=b+1$，所以函数 $f(x)$ 的零点为 $b+1$，结合函数图象可知 $0<b+1<1$，所以

$-1<b<0$，因此 $a+b>0$，故 A 错误；

$-a<ab<0$，又因为 $a>1$，所以 $-a<-1$，因此 $ab<-1$ 不一定成立，故 B 错误；

因为 $a^{-1}<a^b<a^0$，即 $\frac{1}{a}<a^b<1$，且 $0<\frac{1}{a}<1$，所以 $0<a^b<1$，故 C 正确；

因为 $0<|b|<1$，所以 $\log_a|b|<\log_a 1$，即 $\log_a|b|<0$，故 D 错误，

故选：C.

6. D

【详解】因为函数 $f(x)$ 满足对任意实数 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$ 成立，

所以函数 $f(x)$ 在 R 上递减，

所以 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geq 1\\ a>0\\ -a+6\geq a\end{cases}$，解得：$2\leq a\leq 3$

故选：D.

7. C

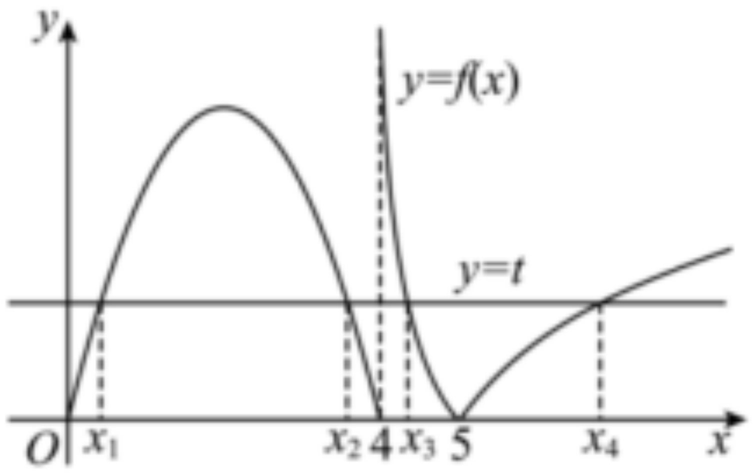
【详解】由题得 $c=\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，

$0<a=0.2^{0.2}<0.2^0=1$，$0<b=0.3^{0.3}<0.3^0=1$，所以 $c>a,c>b$.

$a=0.2^{0.2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{10}}=\sqrt[10]{\frac{1}{25}}=\sqrt[10]{\frac{40}{1000}}$，$b=\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{3}{10}}=\sqrt[10]{\frac{27}{1000}}$，

显然，a 的被开方数大于 b 的被开方数，$\therefore a>b$，故有 $c>a>b$. 故选：C.

8．B

【详解】

做出函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+4x, x\le 4,\\ \left|\log_2\left(x-4\right)\right|, x>4,\end{cases}$ 的图像如图所示，

由图可知，$x_1+x_2=4$，由 $\left|\log_2\left(x-4\right)\right|=f\left(2\right)=4$，可得 $x=\dfrac{65}{16}$ 或 $x=20$，

所以 $5<x_4<20$，又因为 $\log_2\left(x_3-4\right)+\log_2\left(x_4-4\right)=0$，

所以 $\left(x_3-4\right)\left(x_4-4\right)=1$，故 $x_3=\dfrac{1}{x_4-4}+4$，

$$4x_3+\frac{1}{4}x_4=4(\frac{1}{x_4-4}+4)+\frac{1}{4}x_4\ =\frac{4}{x_4-4}+\frac{1}{4}(x_4-4)+17\ge 2\sqrt{\frac{1}{4}(x_4-4)\cdot\frac{4}{x_4-4}}+17=19$$

当且仅当 $\dfrac{1}{4}(x_4-4)=\dfrac{4}{x_4-4}$，即 $x_4=8$ 时取等号，

所以 $x_1+x_2+4x_3+\dfrac{1}{4}x_4$ 的最小值为 $4+19=23$.故选：B

9．BC

【详解】由题意数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项 $a_1=1$，且满足 $a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_2=3, a_3=7$，

则 $\dfrac{a_2}{a_1}\ne\dfrac{a_3}{a_2}$，故数列 $\left\{a_n\right\}$ 不是等比数列，A 错误；

由 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，$a_n+1\ne 0$，否则与 $a_1=1$ 矛盾，

则 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，则数列 $\left\{a_n+1\right\}$ 是等比数列，B 正确；

由 B 分析知数列 $\left\{a_n+1\right\}$ 是等比数列，首项为 $a_1+1=2$，公比为 $q=2$，

则 $a_n+1=2\times 2^{n-1}$，所以 $a_n=2^n-1$，C 正确；

数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项的和为 $(2^1-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^n-1)=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$，$D$ 错误.

故选：BC

10．AB

【详解】当 $4-x^2\le x^2$，即 $x\le-\sqrt{2}$ 或 $x\ge\sqrt{2}$ 时，$F\left(x\right)=4-x^2$；

当$4-x^2>x^2$，即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，$F(x)=x^2$.

则$F(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\le-\sqrt{2}\\ x^2, & -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ 4-x^2, & x\ge\sqrt{2}\end{cases}$，画出图像如下.

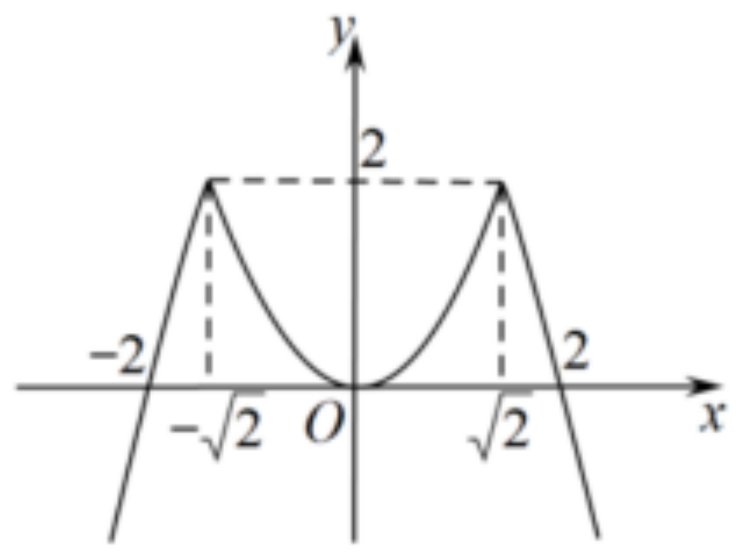
对于A选项，因$F(x)=F(-x)$，且$x\in\mathbf{R}$，则函数$F(x)$是偶函数，A正确.

对于B选项，由图可得$F(x)=0$有三个解，B正确.

对于C选项，由图可得$F(x)$有4个单调区间，故C错误.

对于D选项，由图可得$F(x)$有最大值为2，无最小值，故D错误.

故选：AB

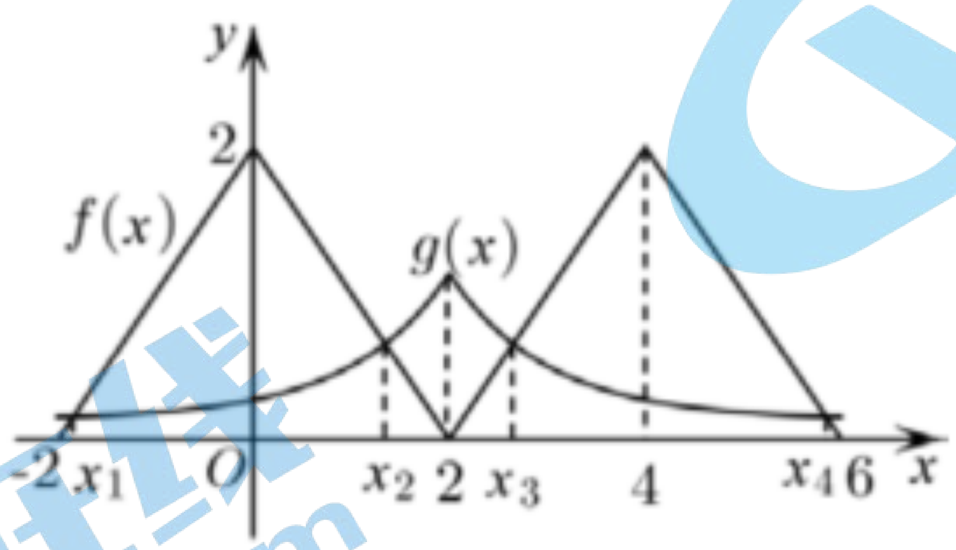


11．AD

【详解】$\because f(2+x)=f(2-x)$，$\therefore$函数$f(x)$图像关于直线$x=2$对称，故A正确；

又$\because f(x)$为偶函数，$\because f(2+x)=f(2-x)=f(x-2)$，所以函数$f(x)$的周期为4，故$B$错误；由周期性和对称性可知，$f(7)=f(3)=f(1)=1$，故$C$错误；

做出$f(x)$与$g(x)$的图像，如下：



由图可知，当$-2<x<6$时，$f(x)$与$g(x)$共有4个交点，$f(x)$与$g(x)$均关于直线$x=2$对称，所以交点也关于直线$x=2$对称，则有$x_1+x_2+x_3+x_4=2\times4=8$，故$D$正确．故选：$AD$.

12．AC

【详解】对选项A：因为$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$，所以$f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$，故选项$A$正确；

对选项B：因为$a^{x_1}+a^{x_2}\neq a^{x_1x_2}$，所以$f(x_1)+f(x_2)\neq f(x_1x_2)$，故选项$B$错误；

对选项C：由题意，因为$a>1$，所以$g(x)=f(x)-f(-x)=a^x-a^{-x}$在R上单调递增，

不妨设$x_1>x_2$，则$g(x_1)>g(x_2)$，所以$(x_1-x_2)g(x_1)>(x_1-x_2)g(x_2)$，即$x_1g(x_1)+x_2g(x_2)>x_1g(x_2)+x_2g(x_1)$，

故选项C正确；

对选项D：取$x_1=0,x_2=-1,a=2$，则$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}>0>\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}=\frac{0+\frac{1}{2}-2}{2}$，故$D$错误.

故选：AC.

13．$[\frac{1}{2},+\infty)$

【详解】设$\mu=\sqrt{2x-1}(x\geq\frac{1}{2})$，

则$x=\frac{1+\mu^2}{2}(\mu\geq 0)$，$\therefore y=\frac{1+\mu^2}{2}+\mu=\frac{(\mu+1)^2}{2}(\mu\geq 0)$

$\because \mu\geq 0$，$\therefore y=\frac{(\mu+1)^2}{2}\geq\frac{1}{2}$

故函数$y=x+\sqrt{2x-1}$的值域为$[\frac{1}{2},+\infty)$.

故答案为：$[\frac{1}{2},+\infty)$

14．$(-4,0)\cup(0,4)$

【详解】①当$x>0$时，$f(x)=x^2-4x$，$xf(x)<0$，即$f(x)<0$，即$x^2-4x<0$，

解得$0<x<4$；

②当$x=0$时，$xf(x)=0$，不成立；

③当$x<0$时，$f(x)=-f(-x)=-(x^2+4x)=-x^2-4x$，$xf(x)<0$，即$f(x)>0$，

即$-x^2-4x>0$，解得$-4<x<0$；

综上所述：$x\in(-4,0)\cup(0,4)$.

故答案为：$(-4,0)\cup(0,4)$.

15．1

【详解】由已知可得$f(2)=\lg(2a-3)=0$，则$2a-3=1$，解得$a=2$，故$f(x)=\lg(2x-3)$，

由$2f(x)>\lg(kx^2)$得$\lg(2x-3)^2>\lg(kx^2)$，

因为$x\in[3,4]$，则$kx^2<4x^2-12x+9$，可得$k<\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{12}{x}+4$，

令$t=\dfrac{1}{x}\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right]$，$g(t)=9t^2-12t+4$，则函数$g(t)$在$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right]$上单调递减，

所以，$g(t)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{16}$，$\therefore k<\dfrac{25}{16}$.

因此，正整数k的最大值为1.

故答案为：1.

16. 8

【详解】$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n+1$，

当n为奇数时，$a_{n+2}=a_n+3n+1$；当n为偶数时，$a_{n+2}+a_n=+3n+1$.

设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_8=a_1+a_2++\cdots+a_8=a_1+a_3+a_5+a_7+(a_2+a_4)+(a_6+a_8)$

$=a_1+(a_1+4)+(a_1+14)+(a_1+30)+(a_2+a_4)+(a_6+a_8)$

$=4a_1+48+7+19=4a_1+74=106$，解得$a_1=8$.

17.【详解】(1) 设$\{a_n\}$的公比为q，由题设得

$a_n=q^{n-1}$，..1 分

由已知得$a_1\cdot q^8=4a_1\cdot q^6$，即$q^8=4q^6$，..2 分

解得$q=0$（舍去），$q=-2$或$q=2$，..3 分

故$a_n=(-2)^{n-1}$ 或$a_n=2^{n-1}$..4 分

(2) 若$a_n=(-2)^{n-1}$，则$S_n=\dfrac{1-(-2)^n}{3}$. ....5 分

由$S_m=127$得$(-2)^m=-380$，此方程没有正整数解. ....7 分

若$a_n=2^{n-1}$，则$S_n=2^n-1$，..8 分

由$S_m=127$得$2^m=128$，解得$m=7$，综上，$m=7$. ....10 分

18.【详解】(1) 由题意得$f(2)=4a+2b=0$，故$b=-2a$，..1 分

$f(x)-x=0$即$ax^2+(b-1)x=0$有唯一实数根，故$\Delta=(b-1)^2=0$，..2 分

解得$b=1$，故$a=-\frac{1}{2}$，　　……………………………4 分

故$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$；　　……………………………5 分

（2）$x\ge 2$，不等式$f(x)\geqslant 2-a$恒成立，

只需$f(x)=ax^2+bx=a(x^2-2x)$的最小值大于或等于$2-a$，　……………………………7 分

当$a>0$时，$f(x)=a(x^2-2x)$在$x\in[2,+\infty)$上单调递增，　……………………………9 分

故$f(x)_{\min}=f(2)=0$，所以$2-a\le 0$，解得$a\ge 2$，

所以实数a的取值范围是$[2,+\infty)$.　……………………………12 分

19.【详解】（1）由题意得$f(x)=\begin{cases} f(0)=b=0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}a+b}{1+\frac{1}{4}}=\frac{2}{5} \end{cases}$，

解得$a=1$，$b=0$，经验证满足题设；　……………………………2 分

（2）$f(x)$在$(-1,1)$上是增函数.　……………………………3 分

证明如下：在$(-1,1)$上任取两数x_1，x_2且$-1<x_1<x_2<1$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1x_2^2-x_2-x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$，　…………5 分

因为$-1<x_1<x_2<1$，所以$x_1-x_2<0$，$1-x_1x_2>0$，$1+x_1^2>0$，$1+x_2^2>0$，……7 分

故$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$，所以$f(x)$在$(-1,1)$上为增函数；…………………8 分

（3）$f(x)$为奇函数，定义域为$(-1,1)$，

由$f(t-1)+f(t)<0$得$f(t-1)<-f(t)=f(-t)$，　……………………………9 分

$\because f(x)$在$(-1,1)$上为增函数，

$\therefore -1<t-1<-t<1$，解得$0<t<\frac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为$\{t|0<t<\frac{1}{2}\}$.　……………………………12 分

20.【详解】（1）当$0<x\le 10$时，$y=12x-\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)-30=-\frac{1}{2}x^2+10x-30$；　…………2 分

当$10<x\le 50$时，$y=12x-\left(14x+\dfrac{450}{x}-115\right)-30=-2x-\dfrac{450}{x}+85$. ……………………………4 分

故$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+10x-30, 0<x\le 10,\\ -2x-\dfrac{450}{x}+85, 10<x\le 50.\end{cases}$ ……………………………………………5 分

（2）当$0<x\le 10$时，函数$y=-\dfrac{1}{2}x^2+10x-30$为开口向下的二次函数，且对称轴为直线$x=10$

所以$y=-\dfrac{1}{2}x^2+10x-30$在$(0,10]$上单调递增， ……………………………………………6 分

故$y_{\max}=-\dfrac{1}{2}\times 10^2+10\times 10-30=20$（万元）； ……………………………………………7 分

当$10<x\le 50$时，$y=-2x-\dfrac{450}{x}+85=-(2x+\dfrac{450}{x})+85\le -2\sqrt{2x\cdot\dfrac{450}{x}}+85=25$，

当且仅当$2x=\dfrac{450}{x}$，即$x=15$时，等号成立. ……………………………………………9 分

即当$x=15$时，$y_{\max}=25$（万元）. ……………………………………………10 分

因为$20<25$，所以当年代加工量为 15 万件时，该农民专业合作社为这一品牌服装代加工费的年利润最大，

最大值为 25 万元 ……………………………………………12 分

21【详解】

（1）解：由“杨辉三角”的定义可知：$a_1=1$，当$n\ge 2$时，$a_n-a_{n-1}=n$ ， ………………2 分

因为$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$， ……………………………………3 分

故$a_n=n+(n-1)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ……………………………………4 分

上式对$a_1=1$也成立，所以$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ $n\in N^*$） ……………………………………5 分

（2）解：由题意可得$b_n=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{(n+1)\cdot 2^{n-1}}$，所以$b_n=n\cdot(\dfrac{1}{2})^n$，设$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$，

所以$T_n=1\times\dfrac{1}{2}+2\times(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+n\times(\dfrac{1}{2})^n$，①

所以$\dfrac{1}{2}T_n=1\times(\dfrac{1}{2})^2+2\times(\dfrac{1}{2})^3+\cdots+n\times(\dfrac{1}{2})^{n+1}$，② ……………………………………7 分

由①-②可得$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^3+\cdots+(\dfrac{1}{2})^n-n\times(\dfrac{1}{2})^{n+1}$， ……………………………………8 分

所以$\frac{1}{2}T_n=\frac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}$， ……………………………………9 分

即$\frac{1}{2}T_n=1-(\frac{1}{2})^n-n\cdot(\frac{1}{2})^{n+1}=1-(\frac{1}{2})^n(1+\frac{1}{2}n)$ ，$T_n=2-(n+2)(\frac{1}{2})^n$ ……………10 分

所以$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=2-\frac{n+2}{2^n}$ ，又因为$\frac{n+2}{2^n}>0$

故$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<2$ ……………………………………………12 分

22.【详解】（1）解：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x$，……………………………………1 分

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$

故$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增. ……………………………………………2 分

所以$f(x)_{\min}=f(1)=-1$ ……………………………………………3 分

（2）解：由于$g'(x)=\frac{a}{x}-2x=\frac{a-2x^2}{x}\ (x>0)$，

当$a\le 0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

此时存在$x_0\in(0,1)$，使得$g(x_0)>g(1)=0$，与题设矛盾. ……………………………………………4 分

当$a>0$时，$x\in(0,\sqrt{\frac{a}{2}})$时，$g'(x)>0$，$x\in(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty)$时，$g'(x)<0$，

故$g(x)$在$(0,\sqrt{\frac{a}{2}})$上单调递增，在$(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty)$上单调递减，

所以$g(x)_{\max}=g\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=a\ln\sqrt{\frac{a}{2}}-\frac{a}{2}+1=\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1$，……………………………………5 分

要使$g(x)\le 0$在$(0,+\infty)$恒成立，则$g(x)_{\max}\le 0$，即$\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1\le 0$ ………………………6 分

又由（1）知$f(x)=x\ln x-x\ge -1$，即$x\ln x-x\ge -1$，（当且仅当$x=1$时，等号成立）.

令$x=\frac{a}{2}$有$\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1\ge 0$，故$\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+1=0$，$\frac{a}{2}=1$，所以$a=2$ ……………………7 分

（3）证明：由（2）知$g(x)=2\ln x\le x^2-1$得$\ln x^2\le x^2-1$（当且仅当$x=1$时等号成立）

令$x=\sqrt{t}\ (t>0)$，则$\ln t\le t-1$（当且仅当$t=1$时等号成立），……………………………………8 分

令$t=e^x$，所以$\ln e^x \le e^x-1$，即$e^x \ge x+1$（当且仅当$x=0$时等号成立），

令$x=\dfrac{1}{n}>0$（$n\in N^*$），则$e^{\frac{1}{n}}>\dfrac{1}{n}+1=\dfrac{n+1}{n}$ ……………………………………10 分

从而有$e^1\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{2021}}\cdot e^{\frac{1}{2022}}>\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{2022}{2021}\times\dfrac{2023}{2022}$

所以$e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2022}}>2023$ ……………………………………12 分