# 北京交大附中 2023—2024 学年第一学期期中练习

## 高 一 数 学 2023.10

说明：本试卷共 4 页，共 120 分。考试时长 90 分钟。

**一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1．已知集合 $M=\{-2,-1,0,1\}$，$N=\{x|-3\le x<0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{-2\}$　　B．$\{-2,-1\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-2,-1,0,1\}$

2．命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$x_0^2+1\le 2x_0$”的否定为（　）

A．$\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2+1>2x$　　B．$\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2+1\le 2x$

C．$\forall x\in(-\infty,0)$，$x^2+1\le 2x$　　D．$\forall x\in(-\infty,0]$，$x^2+1>2x$

3．已知关于 $x$ 的方程 $x^2-2x+m=0$ 的两根同号，则 $m$ 的取值范围是（　）

A．$m\le 1$　　B．$m\le 0$　　C．$0<m\le 1$　　D．$0\le m\le 1$

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x<1\\ -x+1 & x\ge 1\end{cases}$，则 $f(f(-1))$ 的值为（　）

A．3　　B．0　　C．$-1$　　D．$-2$

5．已知 $a\in\mathbf{R}$，则“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的（　）

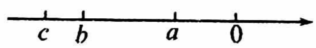
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

6.下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增且是奇函数的是（　）

A．$y=x+1$　　B．$y=x-\frac{1}{x}$　　C．$y=|x|$　　D．$y=x^2$

7．已知实数 $a$，$b$，$c$ 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是（　）



A．$b-a<c+a$　　B．$c^2<ab$　　C．$\frac{c}{b}>\frac{c}{a}$　　D．$|b|c<|a|c$

8．设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=3x-1$，则 $f(0)+f(4)=$（　）

A．12　　B．$-12$　　C．13　　D．$-13$

9. 已知当 $x>0$ 时，不等式 $x^2-mx+16>0$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,8)$　　B. $(-\infty,8]$　　C. $[8,+\infty)$　　D. $(6,+\infty)$

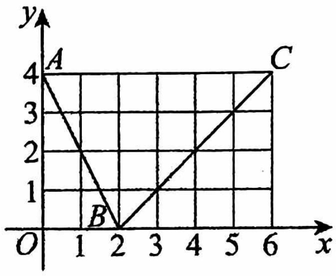
10. 对于全集 $U$ 的子集 A 定义函数 $f_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in \complement_U A)\end{cases}$ 为 A 的特征函数,设 $A,B$ 为全集 $U$ 的子集,下列结论中错误的是(　)

A. 若 $A\subseteq B$, 则 $f_A(x)\le f_B(x)$　　B. $f_{\complement_U A}(x)=1-f_A(x)$

C. $f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)$　　D. $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中横线上）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{2x-1}$ 的定义域是________.(用区间形式表示)




12. 如图，函数 $f(x)$ 的图象是折线段 $ABC$，其中 $A,B,C$ 的坐标分别为 $(0,4),(2,0)$，$(6,4)$，则 $f(x)\le 2$ 的解集为________.(用区间形式表示)

13. 定义在 $R$ 上的函数 $f(x)$，给出下列三个论断：

①$f(x)$ 在 $R$ 上单调递增；②$x>1$；③$f(x)>f(1)$.以其中的两个论断为条件，余下的一个论断为结论，写出一个正确的命题：______，______推出_______．(把序号写在横线上)

14. 为了保护水资源，提倡节约用水，某城市对居民生活用水，实行"阶梯水价".计算方法如下表：

| 每户每月用水量 | 水价 |
|---|---|
| 不超过 $12m^3$ 的部分 | 3 元/$m^3$ |
| 超过 $12m^3$ 但不超过 $18m^3$ 的部分 | 6 元/$m^3$ |
| 超过 $18m^3$ 的部分 | 9 元/$m^3$ |

若某户居民本月交纳的水费为 90 元，则此户居民本月用水量为__________ $m^3$.

15．设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3,x\le 0\\ -\frac{1}{x},x>0\end{cases}$，给出下列四个结论：

①函数$f(x)$的值域是R；

②$\forall x_1,x_2\in(-2,+\infty)(x_1\ne x_2)$，有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

③$\exists x_0>0$，使得$f(-x_0)=f(x_0)$；

④若互不相等的实数$x_1,x_2,x_3$满足$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则$x_1+x_2+x_3$的取值范围是$(-3,+\infty)$．

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题（本大题共5小题，共60分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

**16.**（本小题12分）

设关于x的不等式$|x-a|<2$的解集为$A$，不等式$x^2-x-6<0$的解集为B.

(Ⅰ)求集合$A$，$B$；

(Ⅱ)若$A\subseteq B$，求实数$a$的取值范围.

**17.**（本小题12分）

已知函数$f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$

(Ⅰ)用函数单调性的定义证明：$f(x)$在（-1，+∞）上是增函数；

(Ⅱ)求函数$f(x)$在区间［1，4］上的值域.

**18.**（本小题12分）

已知二次函数$f(x)$的最小值为1，且$f(0)=f(2)=3$.

(Ⅰ)求$f(x)$的解析式；

(Ⅱ)在区间$[-3,-1]$上，$y=f(x)$的图象恒在$y=2x+2m+1$的图象上方，确定实数$m$的取值范围.

# 北京交大附中 2023－2024 学年第一学期期中练习

## 高 一 数 学 2023.10

说明：本试卷共 4 页，共 120 分。考试时长 90 分钟。

**一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1．已知集合 $M=\{-2,-1,0,1\}$，$N=\{x|-3\le x<0\}$，则 $M\cap N=$（　）

A．$\{-2\}$　　B．$\{-2,-1\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{-2,-1,0,1\}$

【答案】B

【详解】因为集合 $M=\{-2,-1,0,1\}$，$N=\{x|-3\le x<0\}$，则 $M\cap N=\{-2,-1\}$.

2．命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$x_0^2+1\le 2x_0$”的否定为

A．$\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2+1>2x$　　B．$\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2+1\le 2x$

C．$\forall x\in(-\infty,0)$，$x^2+1\le 2x$　　D．$\forall x\in(-\infty,0]$，$x^2+1>2x$

【答案】A

【详解】命题“$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$x_0^2+1\le 2x_0$”的否定为“$\forall x\in(0,+\infty)$，$x^2+1>2x$”.故选：A.

【点睛】本题考查特称命题的否定的书写，是基础题.

3．已知关于 $x$ 的方程 $x^2-2x+m=0$ 的两根同号，则 $m$ 的取值范围是（　）

A．$m\le 1$　　B．$m\le 0$　　C．$0<m\le 1$　　D．$0\le m\le 1$

【答案】C

【详解】关于 $x$ 的方程 $x^2-2x+m=0$ 的两根同号，则判别式大于等于 0 且两根之积大于零，

则有 $\begin{cases}\Delta=4-4m\ge 0\\ m>0\end{cases}$，解得 $0<m\le 1$.

故选：C

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x<1\\ -x+1 & x\ge 1\end{cases}$，则 $f(f(-1))$ 的值为（　）

A．3　　B．0　　C．$-1$　　D．$-2$

【答案】D

【详解】由题意得，$f(-1)=(-1)^2-2\times(-1)=3$，则 $f(f(-1))=f(3)=-3+1=-2$.

故选：D.

19.（本小题 12 分）

为了减少能源损耗，房屋的屋顶和外墙通常需要建造隔热层，某地正在建设一座购物中心，现在计划对其建筑物建造可使用 40 年的隔热层，已知每厘米厚的隔热层建造成本为 8 万元.该建筑物每年的能源消耗费用 $P$（单位：万元）与隔热层厚度 $x$（单位：cm）满足关系：$P(x)=\dfrac{3m}{4x+5}$（$x\in\mathbf{R}$，$0\le x\le 8$）.若不建隔热层，每年能源消耗费用为 9 万元.设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与 40 年的能源消耗费用之和.

(Ⅰ)求 $m$ 的值及 $f(x)$ 的表达式.

(Ⅱ)当隔热层的厚度为多少时，总费用 $f(x)$ 达到最小，并求最小值.

20.（本小题 12 分）

已知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，若对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1-x_2\in S$，均有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$，则称 $f(x)$ 是 $S$ 关联.

(Ⅰ)判断和证明函数 $f(x)=2x+1$ 是否是 $[0,+\infty)$ 关联？是否是 $[0,1]$ 关联？

(Ⅱ)若 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联，当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=x^2-2x$，解不等式：$2\le f(x)\le 3$.

5．已知 $a\in R$，则“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　D．既不充分又不必要条件

【答案】A

【分析】根据命题的充分必要性直接判断.

【详解】对于不等式 $\frac{1}{a}<1$，可解得 $a>1$ 或 $a<0$，所以 $a>1$ 可以推出 $\frac{1}{a}<1$，而 $\frac{1}{a}<1$ 不可以推出 $a>1$，所以“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件．故选：A.

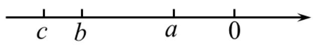
6.下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增且是奇函数的是（　）

A．$y=x+1$　　B．$y=x-\frac{1}{x}$　C．$y=|x|$　　D．$y=x^2$

【答案】B

7．已知实数 $a$，$b$，$c$ 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是

（A）$b-a<c+a$　（B）$c^2<ab$　（C）$\frac{c}{b}>\frac{c}{a}$　（D）$|b|c<|a|c$




【答案】D

8．设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=3x-1$，则 $f(0)+f(4)=$（　）

A．12　　B．$-12$　　C．13　　D．$-13$

【答案】C

【详解】因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$，$f(4)=-f(-4)=13$，所以 $f(0)+f(4)=13$.

故选：C

9．已知当 $x>0$ 时，不等式 $x^2-mx+16>0$ 恒成立，则实数 $m$ 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,8)$　　B．$(-\infty,8]$　　C．$[8,+\infty)$　　D．$(6,+\infty)$

【答案】A

【分析】将参数 $m$ 与自变量分离，利用基本不等式求得最值即可得出实数 $m$ 的取值范围.

【详解】根据题意当 $x>0$ 时，不等式 $x^2-mx+16>0$ 恒成立，

则 $m<\frac{x^2+16}{x}=x+\frac{16}{x},x>0$ 恒成立，只需 $m<\left(x+\frac{16}{x}\right)_{\min}$ 即可；

易知当 $x>0$ 时，由基本不等式可得 $x+\frac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{16}{x}}=8$，当且仅当 $x=4$ 时取等号；

所以 $\left(x+\frac{16}{x}\right)_{\min}=8$，即 $m<8$，所以实数 $m$ 的取值范围是 $(-\infty,8)$.

故选：A

10. 对于全集$U$的子集A定义函数$f_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in \complement_U A)\end{cases}$为A的特征函数,设$A,B$为全集$U$的子集,下列结论中错误的是(    )

A．若$A\subseteq B$,则$f_A(x)\le f_B(x)$　　　　B．$f_{\complement_R A}(x)=1-f_A(x)$

C．$f_{A\cap B}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)$　　　　D．$f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$

【解析】根据$f_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in \complement_U A)\end{cases}$,逐项分析,即可求得答案.

【详解】$\because f_A(x)=\begin{cases}1 & (x\in A)\\ 0 & (x\in \complement_U A)\end{cases}$

对于A,$\because A\subseteq B$,分类讨论:

①当$x\in A$,则$x\in B$,此时$f_A(x)=f_B(x)=1$

②当$x\notin A$且$x\notin B$,即$x\in \complement_U B$,此时$f_A(x)=f_B(x)=0$,

③当$x\notin A$且$x\in B$,即$x\in(\complement_U A)\cap B$时,$f_A(x)=0,f_B(x)=1$,此时$f_A(x)\le f_B(x)$

综合所述,有$f_A(x)\le f_B(x)$,故A正确;

对于B,$f_{\complement_U A}(x)=\begin{cases}1,x\in \complement_U A\\ 0,x\in A\end{cases}=1-f_A(x)$,故(2)正确;

对于C,$f_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1,x\in A\cap B\\ 0,x\in C_U(A\cap B)\end{cases}=\begin{cases}1,x\in A\cap B\\ 0,x\in(C_U A\cup C_U B)\end{cases}=\begin{cases}1,x\in A\\ 0,x\in C_U A\end{cases}\cdot\begin{cases}1,x\in B\\ 0,x\in C_U B\end{cases}=f_A(x)\cdot f_B(x)$,故C正确;

对于D,$f_{A\cup B}(x)=\begin{cases}0,x\in A\cup B\\ 1,x\in C_U(A\cup B)\end{cases}\ne f_A(x)+f_B(x)$,故D错误.

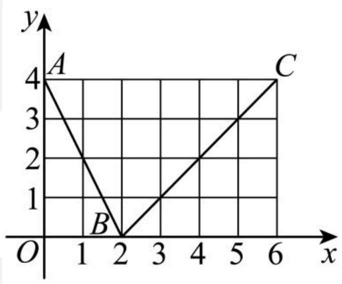
故选:D.

**二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分，把答案填在题中横线上）**

11．函数$f(x)=\sqrt{2x-1}$的定义域是________.

【答案】$\left\{x\middle|\ x\ge\frac{1}{2}\right\}$

12．如图，函数$f(x)$的图象是折线段$ABC$，其中$A,B,C$的坐标分别为$(0,4),(2,0)$，$(6,4)$，则$f(x)\le 2$的解集为________.




【答案】$\{x|1\le x\le 4\}$

【详解】当 $f(x)\le 2$ 时，由图象可知 $1\le x\le 4$，即 $f(x)\le 2$ 的解集为 $\{x|1\le x\le 4\}$.

13．定义在 $R$ 上的函数 $f(x)$，给出下列三个论断：① $f(x)$ 在 $R$ 上单调递增；② $x>1$；③ $f(x)>f(1)$.

以其中的两个论断为条件，余下的一个论断为结论，写出一个正确的命题：____，____推出____.（把序号写在横线上）

【答案】①②推出③；

【详解】①②推出③；

证明：$f(x)$ 在 $R$ 单调递增且当 $x>1$ 时，有 $f(x)>f(1)$，得证.故答案为①②推出③

【点睛】本题考查了利用函数单调性判断命题，意在考查学生的推断能力.

14．为了保护水资源，提倡节约用水，某城市对居民生活用水，实行“阶梯水价”.计算方法如下表：

| 每户每月用水量 | 水价 |
|---|---|
| 不超过 $12m^3$ 的部分 | 3 元/$m^3$ |
| 超过 $12m^3$ 但不超过 $18m^3$ 的部分 | 6 元/$m^3$ |
| 超过 $18m^3$ 的部分 | 9 元/$m^3$ |

若某户居民本月交纳的水费为 90 元，则此户居民本月用水量为________.

【答案】$20m^3$/20 立方米

【详解】设用水量为 $x$ 立方米，水价为 $y$ 元，

则 $y=\begin{cases}3x,0\le x\le 12\\36+6(x-12),12<x\le 18\\72+9(x-18),x>18\end{cases}$，整理得到：$y=\begin{cases}3x,0\le x\le 12\\6x-36,12<x\le 18\\9x-90,x>18\end{cases}$，

当 $0\le x\le 12$ 时，$0\le y\le 36$；$12<x\le 18$ 时，$36<y\le 72$；

故某户居民本月交纳的水费为 90 元，则用水量大于 18 立方米，令 $9x-90=90$，则 $x=20$（立方米），

故答案为：$20m^3$.

15．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3,x\le 0\\-\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$.给出下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 的值域是 R；

② $\forall x_1,x_2\in(-2,+\infty)(x_1\ne x_2)$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

③ $\exists x_0>0$，使得 $f(-x_0)=f(x_0)$；

④若互不相等的实数 $x_1,x_2,x_3$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是 $(-3,+\infty)$.

其中所有正确结论的序号是_________.

【答案】①③④

【分析】对于①，利用二次函数与反比例函数的图像性质画出函数图 1，结合图像即可判断；

对于②，举反例排除即可；

对于③，将问题转化为 $y=x^2-4x+3$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 有交点，作出图 2 即可判断；

对于④，结合图 1 对 $x_1,x_2,x_3$ 进行分析即可.

【详解】对于①，因为 $f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3, x\le 0 \\ -\frac{1}{x}, x>0 \end{cases}$，

所以由二次函数与反比例函数的图像性质可画出函数图象，如图 1，

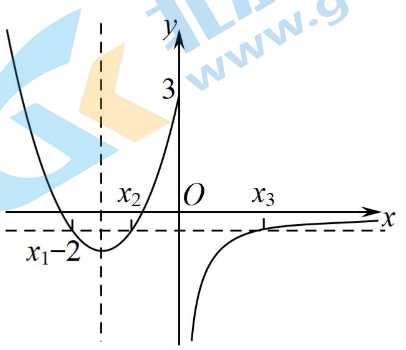



图1

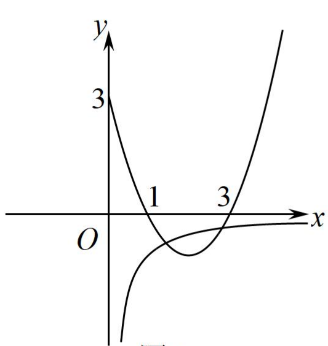



图2

由 $f(x)$ 的图像易知 $f(x)$ 的值域是 R，故①正确；

对于②，易得 $f(0)=3$，$f(1)=-1$，显然 $f(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上并不单调递增，所以②说法不成立，故②错误；

对于③，假设存在 $\exists x_0>0$，$f(-x_0)=f(x_0)$，则 $(-x_0)^2+4(-x_0)+3=-\frac{1}{x_0}$，即 $x_0^2-4x_0+3=-\frac{1}{x_0}$，

即 $y=x^2-4x+3$ 与 $y=-\frac{1}{x}$ 有交点，作出图像，如图 2，显然假设成立，故③正确；

对于④，由图 1 易知 $\frac{x_1+x_2}{2}=-2$，则 $x_1+x_2=-4$，

因为 $f(-2)=-1$，所以 $-1<f(x_3)<0$，即 $-1<-\frac{1}{x_3}<0$，解得 $x_3>1$，

所以 $x_1+x_2+x_3=-4+x_3>-4+1=-3$，即 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是 $(-3,+\infty)$，故④正确；

综上：①③④正确.

故答案为：①③④.

**三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

16．设关于 $x$ 的不等式 $|x-a|<2$ 的解集为 $A$，不等式 $x^2-x-6<0$ 的解集为 $B$.

（1）求集合 $A$，$B$；

（2）若 $A\subseteq B$，求实数 $a$ 的取值范围.

【详解】（1）$\because |x-a|<2 \therefore -2<x-a<2 \therefore A=\{x\,|\,a-2<x<a+2\}$

$(x+2)(x-3)<0 \therefore -2<x<3 \therefore B=\{x\,|\,-2<x<3\}$

（2）$\because A\subseteq B \therefore a-2\ge -2$ 且 $a+2\le 3$，$\therefore 0\le a\le 1$ 即 $a$ 取值范围为 $[0,1]$

【点睛】本题主要考查绝对值不等式和分式不等式的解法，考查集合的关系，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

17．已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

(1)用函数单调性的定义证明：$f(x)$ 在（-1，＋∞）上是增函数；

(2)求函数 $f(x)$ 在区间［1，4］上的值域.

【详解】（1）证明：$f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2(x+1)-5}{x+1}=2-\dfrac{5}{x+1}$，

任取 $x_1$，$x_2\in$（-1，＋∞），且 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=\left(2-\dfrac{5}{x_1+1}\right)-\left(2-\dfrac{5}{x_2+1}\right)=\dfrac{5}{x_2+1}-\dfrac{5}{x_1+1}=\dfrac{5(x_1+1)-5(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{5(x_1-x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

又由 $-1<x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，$x_1+1>0$，$x_2+1>0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在（-1，＋∞）是增函数；

（2）由（2）知，$f(x)$ 在［1，4］上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-\dfrac{1}{2}$，$f(x)_{\max}=f(4)=1$，

故 $f(x)$ 在［1，4］上的值域是 $[-\dfrac{1}{2}，1]$.

18．已知二次函数 $f(x)$ 的最小值为 1，且 $f(0)=f(2)=3$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)在区间 $[-3,-1]$ 上，$y=f(x)$ 的图象恒在 $y=2x+2m+1$ 的图象上方，确定实数 $m$ 的取值范围.

【详解】（1）解：根据题意，二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f(2)=3$，可得函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=1$，

因为函数 $f(x)$ 的最小值为1，可设 $f(x)=a(x-1)^2+1$，

又因为 $f(0)=3$，可得 $f(x)=a+1=3$，解得 $a=2$，

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2(x-1)^2+1=2x^2-4x+3$.

（2）解：由函数 $f(x)=2x^2-4x+3$，

若在区间 $[-3,-1]$ 上，$y=f(x)$ 的图象恒在 $y=2x+2m+1$ 的图象上方，

则由 $2x^2-4x+3>2x+2m+1$ 在区间 $[-3,-1]$ 上恒成立，

即 $m<x^2-3x+1$ 在区间 $[-3,-1]$ 上恒成立，

设 $g(x)=x^2-3x+1$，其对称轴为 $x=\dfrac{3}{2}$，则 $g(x)$ 在 $x\in[-3,-1]$ 上单调递减，

所以函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(-1)=5$，则有 $m<5$，

所以实数 $m$ 的取值范围为 $(-\infty,5)$.

19．为了减少能源损耗，房屋的屋顶和外墙通常需要建造隔热层，某地正在建设一座购物中心，现在计划对其建筑物建造可使用 40 年的隔热层，已知每厘米厚的隔热层建造成本为 8 万元.该建筑物每年的能源消耗费用 $P$（单位：万元）与隔热层厚度 $x$（单位：cm）满足关系：$P(x)=\dfrac{3m}{4x+5}$（$x\in\mathbf{R}$，$0\le x\le 8$）.若不建隔热层，每年能源消耗费用为 9 万元.设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与 40 年的能源消耗费用之和.

(1)求 $m$ 的值及 $f(x)$ 的表达式.

(2)当隔热层的厚度为多少时，总费用 $f(x)$ 达到最小，并求最小值.

【详解】（1）设隔热层厚度 $x$，由题设，每年的能源消耗费用为：$P(x)=\dfrac{3m}{4x+5}$，

由 $P(0)=\dfrac{3m}{5}=9$，解得 $m=15$，

建造费用为 $8x$，　最后得隔热层建造费用与 40 年的能源消耗费用之和为

$f(x)=40P(x)+8x=40\times\dfrac{45}{4x+5}+8x=\dfrac{1800}{4x+5}+8x$（$0\le x\le 8$）

（2）由（1）知 $f(x)=\dfrac{1800}{4x+5}+8x=\dfrac{1800}{4x+5}+2(4x+5)-10$

$\ge 2\sqrt{\dfrac{1800}{4x+5}\cdot 2(4x+5)}-10=2\times 60-10=110$

当且仅当 $\dfrac{1800}{4x+5}=2(4x+5)$，即 $x=6.25$ 时，等号成立

所以当隔热层的厚度为 6.25cm 时，总费用 $f(x)$ 达到最小值 110 万元.

20．已知 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，若对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$x_1-x_2\in S$，均有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$，则称 $f(x)$ 是 $S$ 关联.

(1)判断和证明函数 $f(x)=2x+1$ 是否是 $[0,+\infty)$ 关联？是否是 $[0,1]$ 关联？

(2)若 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联，当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=x^2-2x$，解不等式：$2\le f(x)\le 3$；

【详解】（1）函数 $f(x)=2x+1$ 是 $[0,+\infty)$ 关联，证明如下：

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $x_1-x_2\in[0,+\infty)$，则 $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)\in[0,+\infty)$，

所以函数 $f(x)=2x+1$ 是 $[0,+\infty)$ 关联；

函数 $f(x)=2x+1$ 不是 $[0,1]$ 关联，证明如下：

若 $x_1-x_2\in[0,1]$，则 $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)\in[0,2]$，

所以函数 $f(x)=2x+1$ 不是 $[0,1]$ 关联.

（2）因 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联，则 $x_1-x_2=3$，有 $f(x_1)-f(x_2)=3$，即 $f(x+3)-f(x)=3$，

当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1\in[-1,3)$，而 $2\le f(x)\le 3$，

即 $2\le x^2-2x\le 3$，解得 $1+\sqrt{3}\le x\le 3$，于是得 $1+\sqrt{3}\le x<3$，

当 $x+3\in[0,3)$ 时，$x\in[-3,0)$，$f(x)=f(x+3)-3=(x+2)^2-4\in[-4,0)$，不等式无解，

当 $x-3\in[0,3)$ 时，$x\in[3,6)$，$f(x)=f(x-3)+3=(x-4)^2+2\in[2,6)$，而 $2\le f(x)\le 3$，

即 $2\le(x-4)^2+2\le 3$，解得 $3\le x\le 5$，则有 $3\le x\le 5$，

当 $x-6\in[0,3)$ 时，$x-3\in[3,6)$，$x\in[6,9)$，$f(x)=f(x-3)+3=f(x-6)+6=(x-7)^2+5\in[5,9)$，不等式无解，

把函数 $f(x)$ 从 $x\in[0,3)$ 起每 3 个单位向右按 $f(x+3)-f(x)=3$ 变换，图象上升，

从 $x\in[0,3)$ 起每 3 个单位向左按 $f(x+3)-f(x)=3$ 变换，图象下降，综上得 $1+\sqrt{3}\le x\le 5$，

所以不等式 $2\le f(x)\le 3$ 的解集为 $[1+\sqrt{3},5]$.

【点睛】思路点睛：涉及函数新定义问题，理解新定义，找出数量关系，联想与题意有关的数学知识和方法，再转化、抽象为相应的数学问题作答.

# 北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！