

高三数学

满分:150分 考试时间:120分钟

命题学校:芜湖一中 审题学校:马鞍山二中

北京高考在线
www.gkzox.com

注意事项:

1. 答题前,考生须将自己的姓名、准考证号码填写清楚,将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂;非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹签字笔书写,字体工整、笔迹清晰。
3. 请按题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁,不要折叠,不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题:共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{x}{x-1} > 0\}$, 集合 $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[1, 3)$ D. $(1, 3)$

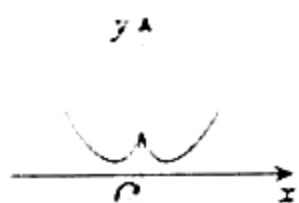
2. 命题“ $\exists x \in (1, +\infty), x^3 \in (1, +\infty)$ ”的否定是

- A. $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $x^3 \in (1, +\infty)$ B. $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $x^3 \notin (1, +\infty)$
- C. $\exists x \in (1, +\infty)$, 都有 $x^3 \in (1, +\infty)$ D. $\forall x \in (1, +\infty)$, 都有 $x^3 \in (1, +\infty)$

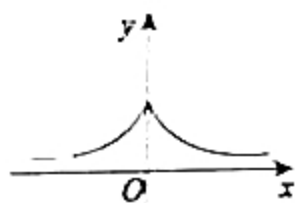
3. 已知角 α 终边上有一点 $P(\sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3})$, 则 $\pi - \alpha$ 为

- A. 第一象限角 B. 第二象限角 C. 第三象限角 D. 第四象限角

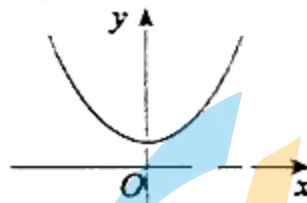
4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \sin x$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则 $y = f'(x)$ 的大致图象是



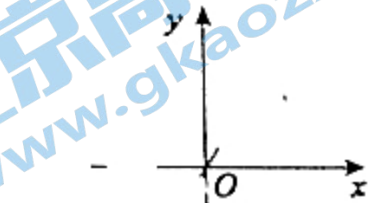
A



B



C

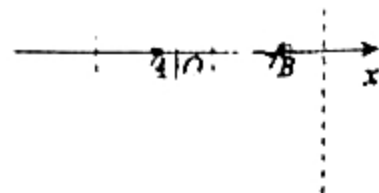


D

5. 如图, 函数 $f(x) = 2\tan(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 的部分图象与 x 轴相交于 A, B 两点,

与 y 轴相交于点 C , 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\pi}{2}$, 则 ω 的值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



6. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(1+x)$, 则下列说法正确的是

- A. $f(\frac{3}{2}) = -f(\frac{5}{2})$ B. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 2
- C. $f(2023) = 0$ D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

7. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 1$, 则不等式

$f(2\log_2 x) - f(x) > \log_2 x^2 - x$ 的解集为

- A. (1, 2) B. (2, 4) C. (4, 8) D. (8, 16)

8. 如图是一块空旷的土地, 准备在矩形 $OABC$ 区域内种菊花, 区域 GOD 内种桂花, 区域 GDC 内种茶花. 若 $\triangle GOC$ 面积是 $\triangle GOD$ 面积的 3 倍, $\angle ODC = 120^\circ$,

$GD = 2, OA = \sqrt{3}$, 则当 $\frac{GC}{OG}$ 取最小值时, 菊花的种植面积为

- A. $2 + 3\sqrt{3}$ B. $4 + 2\sqrt{3}$
C. $6 - 2\sqrt{3}$ D. $9 - 3\sqrt{3}$

二、选择题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}, B = 60^\circ$. 若满足条件的三角形有两个, 则 AC 边的取值可能是

- A. 1.5 B. 1.6 C. 1 D. 1.8

10. 下列不等关系中判断正确的是

- A. $e^{0.01} > \ln 2$ B. $e^{\pi} > \pi^e$ C. $\log_3 2 > \log_5 3$ D. $3 > e \ln 3$

11. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$, 下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2]$
B. 若存在 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 使得对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{\omega}$
C. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2}]$
D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恰有 3 个极值点和 2 个零点, 则 ω 的取值范围为 $(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}]$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \frac{e^x(2x-1)}{x-1}, & x > 0 \text{ 且 } x \neq 1 \end{cases}, h(x) = f^2(x) - af(x) + \frac{1}{16}$ (其中 $a \in \mathbf{R}$), 下列说法正确的是

- A. 存在 a 使 $h(x)$ 有 3 个零点
B. 存在 a 使 $h(x)$ 有 4 个零点
C. 不存在 a 使 $h(x)$ 有 5 个零点
D. 若 $h(x)$ 有 6 个零点, 则 a 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, \frac{e}{16} + \frac{1}{e})$

三、填空题: 共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知锐角 α, β 满足 $\tan \alpha = 2, \tan \beta = 2$, 则 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

14. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + 1$ (其中 $a \in \mathbf{R}$) 在 $x = 1$ 处的切线为 l , 则直线 l 过定点的坐标为

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, $\angle A$ 的角平分线交 BC 于点 $D, AD = 1$ 且 $CD = 2BD$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

16. 已知正实数 m, n 满足 $2m^3 + 2n^3 + 6mn = 27$, 则 $m+n$ 的取值范围为

四、解答题：共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知集合 $A = \{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$ ，集合 $B = \{x \mid x^2 - 2mx - 3m^2 \leq 0\}$ ，全集为 \mathbf{R}

(1) 若 $m = 1$ ，求 $\complement_{\mathbf{R}}A \cap \complement_{\mathbf{R}}B$ ；

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围。

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示。

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，最后将图象向上平移 1 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的值域。

$\frac{11\pi}{12}$ x

21

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) - kx$ (其中 $k \in \mathbf{R}$) 为偶函数。

(1) 求实数 k 的值；

(2) 讨论函数 $g(x) = (2k)^{f(x)} - (m \cdot 2^x - m)$ ($m > 0$) 的零点情况。

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \sin x$.

(1) 若函数 $h(x) = f(x) + g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $h(x) = \frac{1}{2}f(x) + g\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, 求函数 $h(x)$ 的最大值.

21. (12分)

已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = AD = 2$.

(1) 若 $\angle ADB = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{4}$, 求 CD 的值;

(2) 若 $\angle BDC = 90^\circ$, 设 $\triangle ABD$ 的面积为 S , 求 $2S + \frac{1}{2}BD \cdot BC$ 的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax \ln x + (a-e)x$.

(1) 当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数;