2023年广东省普通高中综合能力测试

高 三 数 学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。
4. 本卷主要考查内容：高考范围。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x\mid -1<x<3\}$，$N=\{x\mid x>a, a\in \mathbf{R}\}$，若 $M\cap N=M$，则实数 a 的取值范围是

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $[-1,3]$　　D. $(-1,3)$

2. 设复数 z 在复平面内对应的点位于第一象限，其模长为2，若 $|z+\bar{z}|=2$，则 $z=$

A. $1-\sqrt{3}i$　　B. $1+\sqrt{3}i$　　C. $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$　　D. $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

3. 已知 A，B 是 $\odot C:(x-2)^2+(y-4)^2=25$ 上的两个动点，点 P 是线段 AB 的中点，若 $|AB|=6$，则点 P 的轨迹方程为

A. $(x-4)^2+(y-2)^2=16$　　B. $(x-2)^2+(y-4)^2=11$

C. $(x-2)^2+(y-4)^2=16$　　D. $(x-4)^2+(y-2)^2=11$

4. 我国古代数学家僧一行应用"九服晷影算法"在《大衍历》中建立了晷影长为 l 与太阳天顶距为 $\theta(0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 的对应数表，这是世界数学史上较早的一张正切函数表，根据三角学知识可知，晷影长度为 l 等于表高为 h 与太阳天顶距为 θ 的正切值的乘积，即 $l=h\tan\theta$。若对同一"表高"两次测量，"晷影长"分别是"表高"的 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，相应的太阳天顶距为 θ_1 和 θ_2，则 $\tan(\theta_1+\theta_2)$ 的值为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{5}{6}$　　D.

5. 已知圆台的上下底面的圆周都在半径为2的球面上，圆台的下底面过球心，上底面半径为1，则圆台的体积为

$\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi$　　B. $5\sqrt{3}\pi$　　C. $\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi$　　D. $7\sqrt{3}\pi$

6. 已知颜色分别是红、绿、黄的三个大小相同的口袋，红色口袋内装有两个红球，一个绿球和一个黄球；绿色口袋内装有两个红球，一个黄球；黄色口袋内装有三个红球，两个绿球（球的大小质地相同）。若第一次先从红色口袋内随机抽取1个球，然后将取出的球放入与球同颜色的口袋内，第二次从该口袋内任取一个球，则第二次抽到黄球的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{5}{48}$　　D. $\frac{11}{48}$

7. 已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，以坐标原点为圆心，双曲线的虚半轴长为半径的圆与双曲线的两条渐近线相交于 A,B,C,D 四点，若四边形 $ABCD$ 的面积为 $12\sqrt{2}$，则双曲线的方程为

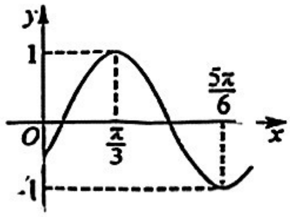
A. $\frac{x^2}{9}-\frac{2y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$　　C. $\frac{x^2}{27}-\frac{2y^2}{27}=1$　　D. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{18}=1$

8. 定义：若直线 l 与函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 的图象都相切，则称直线 l 为函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的公切线. 若函数 $f(x)=a\ln x(a>0)$ 和 $g(x)=x^2$ 有且只有一条公切线，则实数 $a=$

A. e　　B. $\sqrt{e}$　　C. 2e　　D. $2\sqrt{e}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列结论正确的是



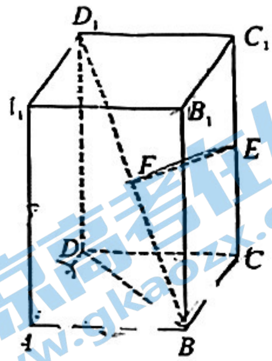
A. $\omega=4$

B. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

C. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{24},0\right)$ 对称

D. $f(x)$ 在区间 $\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递增

10. 如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，侧棱 $AA_1=4$，E,F 分别为 CC_1,BD_1 的中点. 则下列结论正确的是



A. 异面直线 EF 与 BC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$

B. 三棱锥 D_1-BDE 的体积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. 二面角 $E-BD-C$ 大小的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 三棱锥 $E-BCD$ 的外接球的表面积为 $\frac{28\pi}{3}$

11. 已知正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1\in(0,1)$，$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+\ln x_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，则下列结论正确的是

A. 数列 $\{x_n\}$ 中最小项为 x_1

B. 当 $n\geqslant 2$ 时，$x_n>1$

C. 当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}\geqslant x_n$

D. 对任意 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，$2x_{n+1}<x_n+x_{n+2}$ 恒成立

12. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 的两条互相垂直的直线 l_1,l_2 分别与抛物线 C 交于点 A,B 和 D,E，其中点 A,D 在第一象限，过抛物线 C 上一点 $P(x_0,2)$ 分别作 l_1,l_2 的垂线，垂足分别为 M,N. O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$，则下列结论正确的是

A. $p=2$

B. 若 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，则直线 l_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$

C. 四边形 $PMFN$ 的周长的最大值为 $4\sqrt{2}$

D. 四边形 $ADBE$ 的面积的最小值为 32

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知定义在R上的函数$f(x)$是周期为2的偶函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=\log_2(x+1)$，则$f(13)+f(-14)=$________.

14. 2023年国家公务员考试笔试于1月7—8日结束，公共科目包括行政职业能力测验和申论两科，满分均为100分，行政职业能力测验中，考生成绩X服从正态分布$(75,\sigma^2)$，若$P(60\leqslant X\leqslant 90)=\frac{3}{5}$，则从参加这次考试的考生中任意选取3名考生，至少有2名考生的成绩高于90的概率是________.

15. 在直角三角形ABC中，P_0是斜边AB上一个定点，且满足$AB=4P_0B=8$，若对于斜边AB上一动点P，恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则$\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=$________.

16. 已知函数$f(x)=e^x-x$，$g(x)=x-\ln x$，若$f(x_1)=g(x_2)=t\,(t>2)$，且$x_2>x_1>0$，则$\frac{\ln t}{x_2-x_1}$的最大值为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分10分）

在$\triangle ABC$中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a\sin B=\sqrt{3}b(1-\cos A)$.

(1)求角A；

(2)设D是BC上一点，且$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，$AD=1$，求$\triangle ABC$面积的最大值.

18.（本小题满分12分）

如图，在四边形$ABCD$中，$AB=BC=2CD$，$AB\perp BC$，$AC\perp CD$，以AC为折痕将$\triangle ACD$折起，点D到达点P的位置，且$PB=\sqrt{5}CD$.

(1)证明：$AB\perp$平面PBC；

(2)若M为PA的中点，求直线PB与平面MBC所成角的正弦值.

19.（本小题满分12分）

已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_1=1$，$a_2a_3a_4=64$，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=1$，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2)设数列$\{c_n\}$的通项$c_n=a_n+(-1)^n(2b_n+1)$，求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和T_{2n}.

20.(本小题满分 12 分)

中华传统文化的主要内容，从学术流派的角度，主要包括儒家、道家、佛家等诸子百家；从文化载体的角度，主要包括经、史、子、集；从日常生活的角度，主要包括传统民俗文化. 为了弘扬中华传统文化，某市初中课后服务开设了中华传统文化专题兴趣小组，该市每学期均组织举办中华传统文化知识竞赛. 竞赛规则是：该市属初中均组队参加，每队 6 人，平均分为 3 组参与“学术流派”、“文化载体”、“民俗文化”3 类专项赛，专项赛的比赛赛制为：每所学校的 2 人为一组，每一轮竞赛中，小组两人分别答 3 道题，若答对题目不少于 5 道题，则获得一个积分. 已知红心初级中学的张华与刘中两名同学一组，张华与刘中每道题答对的概率分别是 $p_1(0<p_1<1)$ 和 $p_2(0<p_2<1)$，且每道题答对与否互不影响.

(1)若 $p_1=\frac{2}{3}$，$p_2=\frac{3}{4}$，求张华与刘中同学组在一轮竞赛中获得一个积分的概率；

(2)若 $p_1+p_2=\frac{4}{3}$，且每轮比赛互不影响，若张华与刘中组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行多少轮竞赛？

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 Γ：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l 过 F_2 与椭圆 Γ 交于 A，B 两点.

(1)若纵坐标不为零的点 P 在直线 $x=4$ 上，线段 OP(O 为坐标原点)分别交线段 AB 和椭圆 Γ 于 C，D 两点，若 $|OD|^2=|OC|\cdot|OP|$，证明：$|AC|=|BC|$；

(2)若过 F_1 的直线交椭圆 Γ 于 M，N 两点，且 $MN\perp AB$，求四边形 $AMBN$ 的面积的最小值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax(a>0)$.

(1)设函数 $g(x)=f(x)+\sin x$，当 $a>2$ 时，证明：函数 $g(x)$ 有 2 个零点；

(2)若 $x>-1$，$f(x)\leqslant a^2e^x-a(x+1)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

2023 年广东省普通高中综合能力测试·高三数学

参考答案、提示及评分细则

1. B　因为 $M\cap N=M$，所以 $M\subseteq N$，所以 $a\leqslant -1$，故选 B.

2. A　由题意设 $z=a+bi(a>0,b>0)$，由 $|z+\bar{z}|=|2a|=2$，得 $a=1$，因为复数 z 的模长为 2，所以 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+b^2}=2$，解得 $b=\sqrt{3}$，所以 $z=1+\sqrt{3}i$，所以 $\bar{z}=1-\sqrt{3}i$. 故选 A.

3. C　因为 AB 中点为 P，又 $|AB|=6$，所以 $|CP|=\sqrt{25-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=4$，点 P 在以 C 为圆心，4 为半径的圆上，其轨迹方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$. 故选 C.

4. D　由题设 $l=h\tan\theta$."晷影长"分别是"表高"的 $\frac{1}{3}$ 倍和 $\frac{1}{2}$ 倍时，$\tan\theta_1=\frac{1}{3}$，$\tan\theta_2=\frac{1}{2}$，

所以 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$，故选 D.

5. C　设圆台的上底面的圆心为 O_1，下底面的圆心为 O，点 A 为上底面圆周上任意一点，

圆台的高为 h，球的半径为 R，则 $h=OO_1=\sqrt{R^2-O_1A^2}=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}$，

$V=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h=\frac{1}{3}(4\pi+\sqrt{4\pi\cdot\pi}+\pi)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$. 故选 C.

6. D　记第一次抽到红、绿、黄球的事件分别为 A_1,A_2,A_3，则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A$　$P(A_3)=\frac{1}{4}$，记第二次在红、绿、黄色口袋内抽到黄球的事件分别为 B_1,B_2,B_3，而 A_1,A_2,A_3 两两互斥，其和为 Ω，所以 $P(B_1|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B_2|A_2)=\frac{1}{4}$，$P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$，记第二次抽到黄球的事件为 B，所以 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}[P(A_i)\cdot P(B_i|A_i)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$，故选 D.

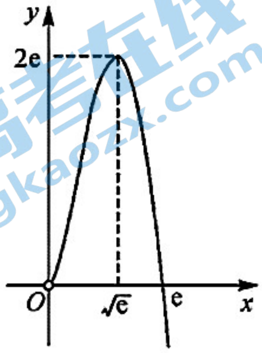
7. B　因为双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，设直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 的倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由对称性不妨令点 A,B 分别在第一、四象限，坐标原点为 O，则 $\angle AOB=2\theta$，

于是得 $\sin\angle AOB=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，而双曲线的虚半轴长为 b，即 $|OA|=|OB|=b$，显然四边形 $ABCD$ 为矩形，其面积 $S=4S_{\triangle AOB}=4\times\frac{1}{2}OA^2\sin\angle AOB=\frac{4\sqrt{2}}{3}b^2=12\sqrt{2}$，得 $b^2=9$，所以 $a^2=2b^2=18$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$. 故选 B.

8. C　设直线与 $g(x)=x^2$ 的切点为 (x_1,x_1^2)，由 $g'(x)=2x$ 可知该直线的斜率为 $2x_1$，即该直线的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，即 $y=2x_1x-x_1^2$，设直线与 $f(x)=a\ln x$ 的切点为 $(x_2,a\ln x_2)$，由 $f'(x)=\frac{a}{x}$ 可知该

直线的斜率为$\frac{a}{x_2}$，即该直线的方程为 $y-a\ln x_2=\frac{a}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\frac{a}{x_2}x+a(\ln x_2-1)$，因为函数 $f(x)=a\ln x(a>0)$和 $g(x)=x^2$ 有且只有一条公切线，所以$\begin{cases}2x_1=\frac{a}{x_2},\\ a(\ln x_2-1)=-x_1^2,\end{cases}$ 即 $a=4x^2-4x^2\ln x$ 有唯一实根，令 $h(x)=4x^2-4x^2\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=8x-8x\ln x-4x=4x(1-2\ln x)$，当 $4x(1-2\ln x)>0$ 时，$0<x<\sqrt{e}$，当 $4x(1-2\ln x)<0$ 时，$x>\sqrt{e}$，即 $h(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，则 $h(x)$在 $x=\sqrt{e}$处取得最大值，$h(\sqrt{e})=4e-4e\times\frac{1}{2}=2e$，当 $x\to0$ 时，$h(x)\to0$，$h(e)=0$，函数 $h(x)$图象如图所示，因为 $a=4x^2-4x^2\ln x$ 有唯一实根，所以只有 $a=2e$，故选 C.



9. BD　$\because \frac{T}{2}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=1$，由于$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}<\varphi+\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}$，所以 $\varphi+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 A 选项错误，B 选项正确；

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，得 $x=\frac{\pi}{12}$，所以 $f(x)$关于$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称，C 选项错误；

$-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$-\frac{\pi}{6}+k_1\pi<x<\frac{\pi}{3}+k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$，当 $k_1=1$ 时，得 $f(x)$在$\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$上递增，则 $f(x)$在区间$\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$上单调递增，所以 D 选项正确. 故选 BD.

10. BD　连接 AC 交 BD 于 O 点，连接 OF,OE,ED，

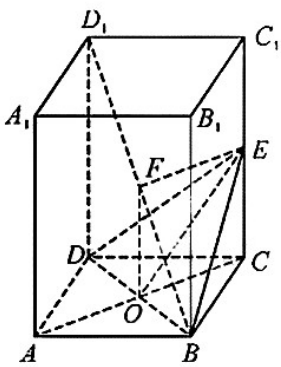
因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AC\cap BD=O$，所以 O 为 BD 的中点

因为 F 为 BD_1 的中点，所以 $OF\parallel DD_1$，且 $OF=\frac{1}{2}DD_1$，

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1\parallel DD_1$，且 $CC_1=DD_1$，

$\because E$ 为 CC_1 的中点，则 $CE\parallel DD_1$，且 $CE=\frac{1}{2}DD_1$，$\therefore OF\parallel CE$，且 $OF=CE$，

所以四边形 $OCEF$ 为平行四边形，所以 $EF\parallel OC$，所以$\angle BCO$为异面直线 EF 与 BC 所成的角或其补角，由已知底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且$\angle BAD=60^\circ$，可知$\angle BCO=30^\circ$，故选项 A 错误；



由已知 $OC\perp DB$，所以 $OC\perp$平面 DBD_1，所以三棱锥 $D-BDE$ 的体积 $V_{D_1-BDE}=V_{E-BDD_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDD_1}\cdot OC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选项 B 正确；

由已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $EC\perp$平面 $ABCD$，又 $OC\perp BD$，所以 $OE\perp BD$，所以$\angle EOC$为二面角 $E-BD-C$ 的平面角，$\tan\angle EOC=\frac{EC}{OC}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选项 C 错误；

由已知 $CB=CD=BD=CE=2$，$EC\perp$平面 BCD，设三棱锥 $E-BCD$ 的外接球球心为 O_1，外接球半径为 R，

正三角形 BCD 的外心为点 O_2，则 $O_1O_2\perp$ 平面 BCD，因为 $O_1C=O_1E$，所以 $O_1O_2=\frac{1}{2}CE=1$，所以 $R^2=O_2C^2+O_1O_2^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2=\frac{7}{3}$，所以三棱锥 $E-BCD$ 的外接球表面积 $S=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$，故选项 D 正确．故选 BD.

11. ABD　$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+\ln x_n$，令 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

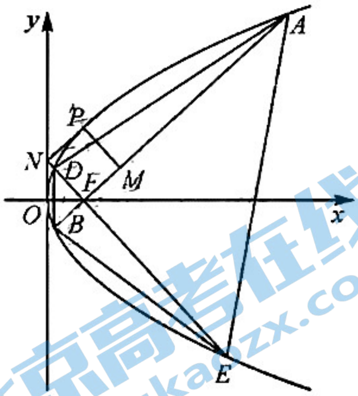
当 $x\geqslant 1$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 递增；当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，且 $f(1)=1+\ln 1=1$，$\therefore f(x)\geqslant 1$，

$\because x_1\in(0,1)$，$\therefore x_2=f(x_1)>1$，$x_3=f(x_2)>1$，…，$x_{n+1}=f(x_n)>1$，$\therefore x_1$ 是最小的项，所以 A，B 正确；

令 $g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geqslant 1$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-x^2+x-1}{x^2}<0$，$\therefore g(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内递减，$\therefore g(x)<g(1)=0$，所以 $x_3-x_2<0$，即 $x_3<x_2$；$x_4-x_3<0$ 即 $x_4<x_3\cdots x_{n+1}-x_n<0$，即 $x_{n+1}<x_n(n\geqslant 2)$．所以 C 错误；

因为 $x_{n+1}<x_n(n\geqslant 2)$，所以 $g(x_{n+1})>g(x_n)$，则 $\frac{1}{x_{n+1}}+\ln x_{n+1}-x_{n+1}>\frac{1}{x_n}+\ln x_n-x_n$，所以 $x_{n+2}-x_{n+1}>x_{n+1}-x_n$，即 $2x_{n+1}<x_n+x_{n+2}$，所以 D 正确．故选 ABD.

12. ACD　A 选项，由题意得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，设直线 $l_1:x=\frac{p}{2}+my$，与 $y^2=2px$ 联立得 $y^2-2pmy-p^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，则 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{p^2}{4}-p^2=-3$，解得 $p=2$，A 正确；



B 选项，由 A 选项可知 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，因为 $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，所以 $y_1=-3y_2$，代入 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ 得 $y_2=-2m$，$-3y_2^2=-4$，即 $m^2=\frac{1}{3}$．因为点 A 在第一象限，所以 $m>0$，解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线 l_1 的斜率为 $\frac{1}{m}=\sqrt{3}$，设直线 l_1 的倾斜角为 $\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，则 $\tan\theta=\sqrt{3}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{3}$，B 错误；

C 选项：抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的坐标为 $(1,0)$，$P(1,2)$.

因为 $|PM|^2+|PN|^2=|PF|^2=4$，$|PM|^2+|PN|^2\geqslant 2|PM|\cdot|PN|$，

所以 $|PM|\cdot|PN|\leqslant 2$，由 $|PM|^2+|PN|^2=(|PM|+|PN|)^2-2|PM|\cdot|PN|$，

得 $(|PM|+|PN|)^2\leqslant 8$，即 $|PM|+|PN|\leqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $|PM|=|PN|=\sqrt{2}$ 时，等号成立，

所以四边形 $PMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$，故 C 正确；

D 选项：由 A 选项，得 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(1+m^2)$，同理得 $|DE|=4\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$，

$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|DE|}=\frac{1}{4(m^2+1)}+\frac{m^2}{4(m^2+1)}=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|DE|}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|AB|}\cdot\frac{1}{|DE|}}$，所以 $|AB|\cdot|DE|\geqslant 64$，

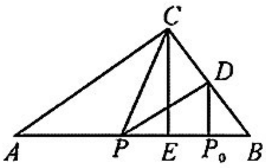
当且仅当 $|AB|=|DE|=8$ 时，等号成立，

此时 $S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|FE|+\frac{1}{2}|AB|\cdot|FD|=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|\geqslant 32$，故 D 正确. 故选 ACD.

13. 1　由题设，$f(x)$是周期为 2 的函数，所以 $f(13)+f(-14)=f(13)+f(14)=f(1)+f(0)=1$.

14. $\frac{13}{125}$　因考生成绩符合正态分布 $N(75,\sigma^2)$，所以 $P(X>90)=\frac{1-P(60\leqslant X\leqslant 90)}{2}=\frac{1}{5}$，故任意选取 3 名考生，至少有 2 名考生的成绩高于 90 的概率为 $P=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{13}{125}$.

15. 1　取 BC 中点 D，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PD}\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{PD}^2-\overrightarrow{DB}^2$，



同理 $\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=\overrightarrow{P_0D}^2-\overrightarrow{DB}^2$，又 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，故 $\overrightarrow{PD}^2\geqslant\overrightarrow{P_0D}^2$，即 $|\overrightarrow{PD}|\geqslant|\overrightarrow{P_0D}|$ 恒成立，

所以 $DP_0\perp AB$. 作 $CE\perp AB$，则 P_0 为 EB 中点，故 $EB=2P_0B=4$，所以 $AE=4$，

所以 E 为 AB 中点，所以 $AC=BC$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

所以 $\sin\angle ABC=\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=1$.

16. $\frac{1}{e}$　由 $f(x_1)=g(x_2)=t(t>2)$，$x_2>x_1>0$ 得 $e^{x_1}-x_1=x_2-\ln x_2=e^{\ln x_2}-\ln x_2=t(t>2)$，即 $f(x_1)=f(\ln x_2)=t(t>2)$，$\because f'(x)=e^x-1$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(1)=e-1<2$，$\therefore x_1>1$，则 $x_2>x_1>1$，$\therefore \ln x_2>0$，$\therefore x_1=\ln x_2$，即 $e^{x_1}=x_2$，$\therefore\frac{\ln t}{x_2-x_1}=\frac{\ln t}{e^{x_1}-x_1}=\frac{\ln t}{f(x_1)}=\frac{\ln t}{t}$，

令 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}(t>2)$，则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，当 $t\in(2,e)$ 时，$\varphi'(t)>0$；当 $t\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)<0$，

$\therefore\varphi(t)$ 在 $(2,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$\therefore\varphi(t)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$，即 $\frac{\ln t}{x_2-x_1}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

17. 解：(1)由 $a\sin B=\sqrt{3}b(1-\cos A)$ 及正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B(1-\cos A)$，…………1 分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos A$，即 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………3 分

由 $0<A<\pi$，$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，得 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；…………5 分

(2)由题意得 $BD=\frac{1}{3}a$，$DC=\frac{2}{3}a$，$AD=1$，

在 $\triangle ADB$ 与 $\triangle ACD$ 中，分别由余弦定理得 $\cos\angle ADB=\frac{DA^2+DB^2-AB^2}{2DA\cdot DB}=\frac{1+\frac{1}{9}a^2-c^2}{\frac{2}{3}a}$，$\cos\angle ADC=\frac{DA^2+DC^2-AC^2}{2DA\cdot DC}=\frac{1+\frac{4}{9}a^2-b^2}{\frac{4}{3}a}$，…………7 分

又 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$，化简得 $b^2+2c^2-3=\frac{2}{3}a^2=\frac{2}{3}(b^2+c^2-bc)$，…………8 分

整理得 $9=b^2+4c^2+2bc\geqslant 4bc+2bc=6bc$，即 $bc\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当 $b=2c$ 时等号成立.

所以$\triangle ABC$面积的最大值为$S_{max}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ………………………………………… 10 分

另解：因为$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以$9\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2+4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AB}^2$， ………… 7 分

又$AD=1$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以$9=b^2+4c^2+4bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+4c^2+2bc\geqslant 4bc+2bc=6bc$， ……………… 9 分

所以$bc\leqslant\frac{3}{2}$，当且仅当$b=2c$时等号成立.

所以$\triangle ABC$面积的最大值为$S_{max}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ………………………………………… 10 分

18. 解：(1)因为$BC=2CD=2PC$，又$PB=\sqrt{5}CD$，所以$PB^2=5CD^2=BC^2+CP^2$， ………………………… 2 分

$AC,BC\subset$平面ABC，所以$PC\perp BC$，由$AC\perp CD$，可知$AC\perp PC$，$AC\cap BC=C$，所以$PC\perp$平面ABC， ……
………………………………………………………………………………………………… 4 分

因为$AB\subset$平面ABC，所以$PC\perp AB$，又$AB\perp BC$，$PC\cap BC=C$，$PC,BC\subset$平面PBC，

所以$AB\perp$平面PBC，且AC的中点O，连OM,OB； ………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知，取AC的中点O，连OM,OB，$PC\perp$平面ABC，OM为$\triangle PAC$的中位线，

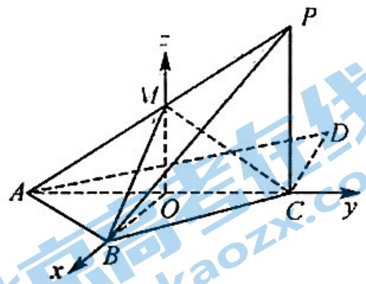
所以$OM\perp AC$，$OM\perp OB$，即OM,OB,AC两两垂直，如图以O为原点建立空间直角坐标系$O-xyz$，

设$CD=2$，则$P(0,2\sqrt{2},2)$，$B(2\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，$M(0,0,1)$， ………………………… 7 分

所以$\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},-2)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BM}=(-2\sqrt{2},0,1)$，

设平面MBC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,\\ -2\sqrt{2}x+z=0,\end{cases}$令$x=1$，得$\boldsymbol{n}=(1,1,2\sqrt{2})$， ……
…………………………………………………………………………… 10 分



所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{2}{5}$，

所以直线PB与平面MBC所成角的正弦值为$\frac{2}{5}$. ………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，由已知得$q>0$，

因为$a_2a_3a_4=64$，所以$a_3^3=64$，得$a_3=4$，又$a_1=1$，所以$q=2$，

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$， ……………………………………………………………………… 2 分

对于数列$\{b_n\}$，因为$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$ ①，

当$n=1$时，$b_1=b_2-1$，则$b_2=2$，

当$n\geqslant 2$时，$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1$ ②，

由①－②得$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$，即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}$， ……………………………………… 4 分

又$\frac{b_2}{b_1}=2$，也适合上式，故$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\cdot 1=n$，又 $b_1=1$，

所以 $b_n=n$；………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得：$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$，则 $c_n=a_n+(-1)^n(2b_n+1)=2^{n-1}+(-1)^n(2n+1)$，

则数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和 $T_{2n}=2^0+(-1)\cdot(2+1)+2^1+(-1)^2\cdot(2\times 2+1)+\cdots+2^{2n-1}+(-1)^{2n}\cdot(2\cdot 2n+1)$，………………………………………………………… 8 分

$T_{2n}=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2n-1})+[(-1)\cdot(2+1)+(-1)^2\cdot(2\times 2+1)+\cdots+(-1)^{2n}\cdot(2\cdot 2n+1)]$

$=\frac{1-2^{2n}}{1-2}+[-(2+1)+(2\times 2+1)]+\cdots+[-(2\cdot(2n-1)+1)+(2\cdot 2n+1)]$

$=2^{2n}-1+2n=2^{2n}+2n-1.$ ………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)假设张华与刘中答对的题目个数分别为 x_1 和 x_2，………………………………………………………… 1 分

故所求概率 $P=P(x_1=2,x_2=3)+P(x_1=3,x_2=2)+P(x_1=3,x_2=3)$

$=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times C_3^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7}{16}$，

所以张华与刘中同学这一组在一轮竞赛中获得一个积分的概率为$\frac{7}{16}$；………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)得 $P=P(x_1=2,x_2=3)+P(x_1=3,x_2=2)+P(x_1=3,x_2=3)$

$=C_3^2\times p_1^2\times(1-p_1)\times(p_2)^3+(p_1)^3\times C_3^2\times p_2^2\times(1-p_2)+p_1^3\times p_2^3$，

整理得 $P=p_1^2p_2^2[3(p_1+p_2)-5p_1p_2]=p_1^2p_2^2(4-5p_1p_2)$，………………………………………………………… 6 分

因为 $0<p_1<1$，$0<p_2<1$ 且 $p_1+p_2=\frac{4}{3}$，所以$\frac{1}{3}<p_1<1$，$\frac{1}{3}<p_2<1$.

所以$\frac{1}{9}<p_1p_2\leqslant\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2$，当且仅当 $p_1=p_2=\frac{2}{3}$时等号成立，即$\frac{1}{3}<p_1p_2\leqslant\frac{4}{9}$，………………………………………………………… 7 分

令 $p_1p_2=t$，则 $t\in\left(\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right]$，所以 $P(t)=-5t^3+4t^2$，$t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$，则 $P'(t)=-15t^2+8t$，

当 $t\in\left(\frac{1}{3},\frac{4}{9}\right]$时，$P'(t)>0$，则当 $t=\frac{4}{9}$时，$P(t)_{\max}=\frac{256}{729}$，………………………………………………………… 10 分

张华与刘中两同学在 n 轮比赛中获得的积分数 X 满足 $X\sim B(n,P)$，………………………………………………………… 11 分

所以由 $nP\geqslant 5$，即 $n\times\frac{256}{729}\geqslant 5$，解得 $n\geqslant 5\times\frac{729}{256}\approx 14.2$，因为 n 为正整数，所以 n 至少为 15，

所以若张华与刘中同学这一组想至少获得 5 个积分，那么理论上至少要进行 15 轮竞赛. ……………… 12 分

21. 解：(1)由 $|OD|^2=|OC|\cdot|OP|$，得$\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{|OP|}{|OD|}$，即$\left|\frac{x_D}{x_C}\right|=\left|\frac{x_P}{x_D}\right|$，

由题意知：$x_C>0$，$x_P=4$，∴$x_D^2=4x_C$，………………………………………………………… 1 分

若直线 l 斜率不存在，即 $l:x=1$，此时 $x_C=1$，$x_D<2$，此时 $x_D^2=4x_C$ 不成立，

可知直线 l 斜率存在，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$l:y=k(x-1)$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1)\end{cases}$得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，∴$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2},\end{cases}$ ………………………………………………………… 3 分

$\therefore AB$ 中点的横坐标为$\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，

设直线 OP 的方程为 $y=k'x\,(k'\neq0)$，由$\begin{cases}y=k'x,\\ y=k(x-1)\end{cases}$ 得 $x=\dfrac{k}{k-k'}$，即 $x_C=\dfrac{k}{k-k'}$，

由$\begin{cases}y=k'x,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $x^2=\dfrac{12}{3+4k'^2}$，即 $x_D^2=\dfrac{12}{3+4k'^2}$， ………………………………………………… 4 分

由 $x_D^2=4x_C$ 得$\dfrac{12}{3+4k'^2}=\dfrac{4k}{k-k'}$，整理可得 $k'=-\dfrac{3}{4k}$，所以 $x_C=\dfrac{k}{k+\dfrac{3}{4k}}=\dfrac{4k^2}{4k^2+3}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

所以 C 为线段 AB 的中点，所以 $|AC|=|BC|$； ………………………………………………… 5 分

(2)由(1)得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2-4\times\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}}=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$， ………………………………………… 6 分

因为 $AB\perp MN$，所以 $k_{MN}=-\dfrac{1}{k}$，则 $|MN|=\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$， ………………………………………… 7 分

所以四边形 $AMBN$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\times|MN|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\times\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}=\dfrac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}$.

…… 9 分

(法一)$S=\dfrac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}\geqslant\dfrac{72(k^2+1)^2}{\left(\dfrac{4k^2+3+3k^2+4}{2}\right)^2}=\dfrac{288}{49}$，

当且仅当 $4k^2+3=3k^2+4$ 时取等号，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\dfrac{288}{49}$， ……………………………………… 11 分

当 k 不存在时，即 $AB\perp x$ 轴，此时 MN 为椭圆 Γ 的长轴，又 $|AB|=2\times\dfrac{3}{2}=3$，$|MN|=4$，

四边形 $AMBN$ 面积为$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|MN|=6>\dfrac{288}{49}$，

所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值为$\dfrac{288}{49}$. ……………………………………………………………… 12 分

(法二)令 $k^2+1=t$，$\because k\neq0$，$\therefore t>1$，则 $S=\dfrac{72t^2}{12t^2+t-1}=\dfrac{72}{-\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}+12}=\dfrac{72}{-\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{49}{4}}$，

当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{2}$，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\dfrac{288}{49}$， …………………………………………………………… 11 分

当 k 不存在时，即 $AB\perp x$ 轴，此时 MN 为椭圆 Γ 的长轴，又 $|AB|=2\times\dfrac{3}{2}=3$，$|MN|=4$，

四边形 $AMBN$ 面积为$\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|MN|=6>\dfrac{288}{49}$，

所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值为$\dfrac{288}{49}$. ……………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)由已知 $g(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x$，

显然 $g(0)=0$，即 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的零点，

又 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-a+\cos x$，令 $m(x)=\frac{1}{x+1}-a+\cos x$，则 $m'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x$，

当 $-1<x<0$ 时，$-\frac{1}{(x+1)^2}<-1$，则 $m'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x<0$，

即 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，………………………………………………………………………… 2 分

当 $x>0$ 时，令 $n(x)=\ln(x+1)-x$，

则 $n'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}<0$，即 $n(x)$ 单调递减，$n(x)<n(0)=0$，即 $\ln(x+1)<x$，

令 $t(x)=\sin x-x$，则 $t'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，即 $t(x)$ 单调递减，$t(x)<t(0)=0$，即 $\sin x<x$，

所以 $\ln(x+1)+\sin x<2x<ax$，即 $g(x)=\ln(x+1)-ax+\sin x<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点．………………………………………………………………………… 4 分

若 $a>2$ 时，当 $-1<x<0$ 时，因为 $g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，

又 $-1<\frac{1}{a}-1\leqslant-\frac{1}{2}<0$，$g'\left(\frac{1}{a}-1\right)=\cos\left(\frac{1}{a}-1\right)>0$，$g'(0)=2-a<0$，

则存在 $x_1\in\left(\frac{1}{a}-1,0\right)$，使 $g'(x_1)=0$，即 $g(x)$ 在 $(-1,x_1)$ 上单调递增，在 $(x_1,0)$ 上单调递减，

又 $g(0)=0$，$x\to-1$ 时，$g(x)\to-\infty$，故 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 内存在 1 个零点，

所以当 $a>2$ 时，函数 $g(x)$ 有 2 个零点；………………………………………………………………… 6 分

(2)当 $a>0$ 时，由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

又 $f(x)\leqslant a^2e^x-a(x+1)$ 恒成立，即 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立，

当 $x=0$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 恒成立，即 $a^2-a\geqslant0$，又 $a>0$，则 $a\geqslant1$，……………………… 7 分

下面证明：当 $a\geqslant1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立，

由(1)得当 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x$，

要证明 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$，只需证明对任意的 $x\in(-1,+\infty)$，$a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立，

令 $\varphi(x)=a^2e^x-x-a$，则 $\varphi'(x)=a^2e^x-1$，

由 $\varphi'(x)=a^2e^x-1=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a^2}=-2\ln a\leqslant0$，

①当 $-2\ln a\leqslant-1$，即 $a\geqslant\sqrt{e}$ 时，$\varphi'(x)\geqslant0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，则 $\varphi(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $\varphi(x)>\varphi(-1)=\frac{a^2}{e}+1-a=\frac{1}{e}\left(a-\frac{e}{2}\right)^2+1-\frac{e}{4}>1-\frac{e}{4}>0$；………………………………… 10 分

②当 $-2\ln a>-1$，即 $1\leqslant a<\sqrt{e}$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(-1,-2\ln a)$ 上单调递减，在 $(-2\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $\varphi(x)\geqslant\varphi(-2\ln a)=\frac{a^2}{a^2}+2\ln a-a=2\ln a-a+1$．

令 $h(a)=2\ln a-a+1$，则 $h'(a)=\frac{2}{a}-1>\frac{2}{\sqrt{e}}-1>0$，则 $h(a)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，

于是 $h(a)_{\min}=h(1)=0$，所以 $\varphi(x)\geqslant0$ 恒成立，

所以 $a\geqslant1$ 时，不等式 $a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立，因此 a 的范围是 $[1,+\infty)$．………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。