学校____________ 班级____________ 姓名____________ 学号____________

密 封 线 内 不 要 答 题

北京市西城区 2016 — 2017 学年度第一学期期末试卷

高三数学（理科）

2017.1

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，第Ⅰ卷 1 至 2 页，第Ⅱ卷 3 至 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第Ⅰ卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{x\,|\,0<x<2\}$，$B=\{x\,|\,x^2-1\leqslant 0\}$，那么 $A\cup B=$

　(A) $\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$　　(B) $\{x\,|\,-1\leqslant x<2\}$

　(C) $\{x\,|\,-1\leqslant x<0\}$　　(D) $\{x\,|\,1\leqslant x<2\}$

2. 下列函数中，定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数是

　(A) $y=x^2+1$　　(B) $y=\tan x$

　(C) $y=2^x$　　(D) $y=x+\sin x$

3. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的一个焦点是 $(2,0)$，则其渐近线的方程为

　(A) $x\pm\sqrt{3}y=0$　　(B) $\sqrt{3}x\pm y=0$

　(C) $x\pm 3y=0$　　(D) $3x\pm y=0$

4. 在极坐标系中，过点 $P(2,\dfrac{\pi}{6})$ 且平行于极轴的直线的方程是

　(A) $\rho\sin\theta=1$　　(B) $\rho\sin\theta=\sqrt{3}$

　(C) $\rho\cos\theta=1$　　(D) $\rho\cos\theta=\sqrt{3}$

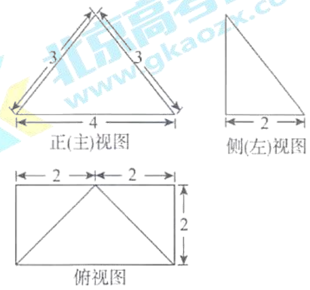
5. 某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥的四个侧面的面积中最大的是

　(A) 3

　(B) $2\sqrt{5}$

　(C) 6

　(D) $3\sqrt{5}$



6. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是非零向量，且 $\boldsymbol{a}\neq\pm\boldsymbol{b}$. 则“$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”是“$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

7. 实数 x，y 满足 $\begin{cases} x\leqslant 3, \\ x+y\geqslant 0, \\ x-y+6\geqslant 0. \end{cases}$ 若 $z=ax+y$ 的最大值为 $3a+9$，最小值为 $3a-3$，则 a 的取值范围是

(A) $[-1,0]$　　(B) $[0,1]$

(C) $[-1,1]$　　(D) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

8. 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，正四面体 $P-ABC$ 的顶点 A，B 分别在 x 轴，y 轴上移动. 若该正四面体的棱长是 2，则 $|OP|$ 的取值范围是

(A) $[\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1]$　　(B) $[1,3]$

(C) $[\sqrt{3}-1,2]$　　(D) $[1,\sqrt{3}+1]$

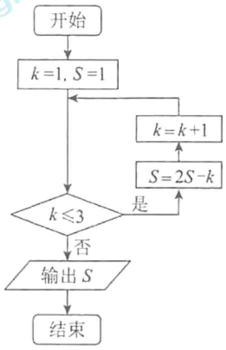
第Ⅱ卷(非选择题　共110分)

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9. 复数 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=$____.

10. 设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，其前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=1$，$a_3=4$，则 $a_n=$____；$S_6=$____.

11. 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为____.



12. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

若 $c=3$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，$\sin B=2\sin A$，则 $a=$____.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ \log_3 x, & x>a,\end{cases}$ 其中 $a>0$.

① 若 $a=3$，则 $f[f(9)]=$____；

② 若函数 $y=f(x)-2$ 有两个零点，则 a 的取值范围是____.

14. 10名象棋选手进行单循环赛(即每两名选手比赛一场). 规定两人对局胜者得2分，平局各得1分，负者得0分，并按总得分由高到低进行排序. 比赛结束后，10名选手的得分各不相同，且第二名的得分是最后五名选手得分之和的 $\dfrac{4}{5}$. 则第二名选手的得分是____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2\omega x-1$ $(\omega>0)$ 的最小正周期为 π.

（Ⅰ）求 ω 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{7\pi}{12}]$ 上的最大值和最小值.

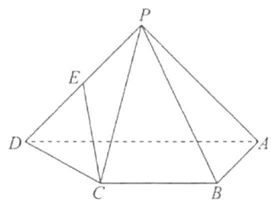
16.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC$，$\angle BAD=90°$，$PA=PD$，$AB\perp PA$，$AD=2$，$AB=BC=1$.

（Ⅰ）求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）若 E 为 PD 的中点，求证：$CE\,/\!/$ 平面 PAB；

（Ⅲ）若 DC 与平面 PAB 所成的角为 $30°$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



17.（本小题满分 13 分）

手机完全充满电量，在开机不使用的状态下，电池靠自身消耗一直到出现低电量警告之间所能维持的时间称为手机的待机时间.

为了解 A，B 两个不同型号手机的待机时间，现从某卖场库存手机中随机抽取 A，B 两个型号的手机各 7 台，在相同条件下进行测试，统计结果如下：

手机编号	1	2	3	4	5	6	7
A 型待机时间(h)	120	125	122	124	124	123	123
B 型待机时间(h)	118	123	127	120	124	a	b

其中，a，b 是正整数，且 $a<b$.

（Ⅰ）该卖场有 56 台 A 型手机，试估计其中待机时间不少于 123 小时的台数；

（Ⅱ）从 A 型号被测试的 7 台手机中随机抽取 4 台，记待机时间大于 123 小时的台数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅲ）设 A，B 两个型号被测试手机待机时间的平均值相等，当 B 型号被测试手机待机时间的方差最小时，写出 a，b 的值(结论不要求证明).

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-a\cdot\sin(x-1)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）如果曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率是 -1，求 a 的值；

（Ⅱ）如果 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为增函数，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 14 分）

已知直线 $l: x=t$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 相交于 A，B 两点，M 是椭圆 C 上一点.

（Ⅰ）当 $t=1$ 时，求△MAB 面积的最大值；

（Ⅱ）设直线 MA 和 MB 与 x 轴分别相交于点 E，F，O 为原点．证明：$|OE|\cdot|OF|$ 为定值.

20.（本小题满分 13 分）

数字 $1,2,3,\cdots,n(n\geqslant 2)$ 的任意一个排列记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，设 S_n 为所有这样的排列构成的集合.

集合 $A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n \mid$ 任意整数 i,j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $a_i-i\leqslant a_j-j\}$；集合 $B_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in S_n \mid$ 任意整数 i,j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $a_i+i\leqslant a_j+j\}$.

（Ⅰ）用列举法表示集合 A_3，B_3；

（Ⅱ）求集合 $A_n\cap B_n$ 的元素个数；

（Ⅲ）记集合 B_n 的元素个数为 b_n．证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列.

北京市西城区 2016 — 2017 学年度第一学期期末

高三数学（理科）参考答案及评分标准

2017.1

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. B　　2. D　　3. B　　4. A

5. C　　6. C　　7. C　　8. A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. i　　10. 2^{n-1}；63　　11. -3

12. $\sqrt{3}$　　13. $\sqrt{2}$；$[4,9)$　　14. 16

注：第 10，13 题第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin(2\omega x-\dfrac{\pi}{6})+(2\cos^2\omega x-1)$

$=(\sin 2\omega x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 2\omega x\sin\dfrac{\pi}{6})+\cos 2\omega x$　　［4 分］

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x$

$=\sin(2\omega x+\dfrac{\pi}{6})$，　　［6 分］

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，

解得 $\omega=1$.　　［7 分］

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$.

因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{12}$，所以 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{4\pi}{3}$.　　［9 分］

所以，当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值为 1；　　［11 分］

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{4\pi}{3}$，即 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　［13 分］

16.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $\angle BAD=90^\circ$，所以 $AB\perp AD$，　　[1 分]

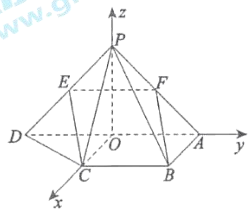
又因为 $AB\perp PA$，

所以 $AB\perp$ 平面 PAD.　　[3 分]

所以 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.　　[4 分]

（Ⅱ）取 PA 的中点 F，连接 BF，EF.　　[5 分]

因为 E 为 PD 的中点，所以 $EF//AD$，$EF=\frac{1}{2}AD$，



又因为 $BC//AD$，$BC=\frac{1}{2}AD$，

所以 $BC//EF$，$BC=EF$.

所以四边形 $BCEG$ 是平行四边形，$EC//BF$.　　[7 分]

又 $BF\subset$ 平面 PAB，$CE\not\subset$ 平面 PAB，

所以 $CE//$ 平面 PAB.　　[8 分]

（Ⅲ）过 P 作 $PO\perp AD$ 于 O，连接 OC.

因为 $PA=PD$，所以 O 为 AD 中点，又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.　　[9 分]

设 $PO=a$. 由题意得，$A(0,1,0)$，$B(1,1,0)$，$C(1,0,0)$，$D(0,-1,0)$，$P(0,0,a)$.

所以 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,1,-a)$，$\overrightarrow{DC}=(1,1,0)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}x=0,\\ y-az=0.\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $y=a$. 所以 $\boldsymbol{n}=(0,a,1)$.　　[11 分]

因为 DC 与平面 PAB 所成角为 30°，

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DC}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{2}}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，

解得 $a=1$.　　[13 分]

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1+2}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.　[14 分]

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）被检测的 7 台手机中有 5 台的待机时间不少于 123 小时，因此，估计 56 台 A 型手机中有 $56\times\frac{5}{7}=40$ 台手机的待机时间不少于 123 小时．［3 分］

（Ⅱ）X 可能的取值为 $0,1,2,3$．［4 分］

$P(X=0)=\frac{1}{C_7^4}=\frac{1}{35}$；　　$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^3}{C_7^4}=\frac{12}{35}$；

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$；　　$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$．［8 分］

所以，X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

［10 分］

（Ⅲ）若 A，B 两个型号被测试手机的待机时间的平均值相等，当 B 型号被测试手机的待机时间的方差最小时，$a=124$，$b=125$．［13 分］

18.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，［1 分］

导函数为 $f'(x)=\frac{1}{x}-a\cdot\cos(x-1)$．［2 分］

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率是 -1，

所以 $f'(1)=-1$，即 $1-a=-1$，［3 分］

所以 $a=2$．［4 分］

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为增函数，

所以 对于任意 $x\in(0,1)$，都有 $f'(x)=\frac{1}{x}-a\cdot\cos(x-1)\geqslant 0$．［6 分］

因为 $x\in(0,1)$ 时，$\cos(x-1)>0$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-a\cdot\cos(x-1)\geqslant 0\Leftrightarrow a\leqslant\frac{1}{x\cdot\cos(x-1)}$.　　［8分］

令 $g(x)=x\cdot\cos(x-1)$，所以 $g'(x)=\cos(x-1)-x\cdot\sin(x-1)$.　　［10分］

因为 $x\in(0,1)$ 时，$\sin(x-1)<0$，

所以 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)<g(1)=1$.　　［12分］

所以 $a\leqslant 1$.

即 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.　　［13分］

19.（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）将 $x=1$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

解得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，　所以 $|AB|=\sqrt{6}$.　　［2分］

当 M 为椭圆 C 的顶点 $(-2,0)$ 时，M 到直线 $x=1$ 的距离取得最大值 3，　［4分］

所以 $\triangle MAB$ 面积的最大值是 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.　　［5分］

（Ⅱ）设 A,B 两点坐标分别为 $A(t,n)$，$B(t,-n)$，从而 $t^2+2n^2=4$.　　［6分］

设 $M(x_0,y_0)$，则有 $x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}=4$，$x_0\neq t$，$y_0\neq\pm n$.　　［7分］

直线 MA 的方程为 $y-n=\frac{y_0-n}{x_0-t}(x-t)$，　　［8分］

令 $y=0$，得 $x=\frac{ty_0-nx_0}{y_0-n}$，从而 $|OE|=\left|\frac{ty_0-nx_0}{y_0-n}\right|$.　　［9分］

直线 MB 的方程为 $y+n=\frac{y_0+n}{x_0-t}(x-t)$，　　［10分］

令 $y=0$，得 $x=\frac{ty_0+nx_0}{y_0+n}$，从而 $|OF|=\left|\frac{ty_0+nx_0}{y_0+n}\right|$.　　［11分］

所以$|OE|\cdot|OF|=\left|\dfrac{ty_0-nx_0}{y_0-n}\right|\cdot\left|\dfrac{ty_0+nx_0}{y_0+n}\right|=\left|\dfrac{t^2y_0^2-n^2x_0^2}{y_0^2-n^2}\right|$

$=\left|\dfrac{\left(4-2n^2\right)y_0^2-n^2\left(4-2y_0^2\right)}{y_0^2-n^2}\right|$　　[13 分]

$=\left|\dfrac{4{y_0}^2-4n^2}{{y_0}^2-n^2}\right|$

$=4$.

所以$|OE|\cdot|OF|$为定值.　　[14 分]

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）$A_3=\{(1,2,3)\}$，$B_3=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\}$.　　[3 分]

（Ⅱ）考虑集合A_n中的元素$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$.

由已知，对任意整数$i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，都有$a_i-i\leqslant a_j-j$，

所以 $(a_i-i)+i<(a_j-j)+j$，

所以 $a_i<a_j$.

由i,j的任意性可知，$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$是$1,2,3,\cdots,n$的单调递增排列，

所以$A_n=\{(1,2,3,\cdots,n)\}$.　　[5 分]

又因为当$a_k=k$ $(k\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant k\leqslant n)$时，对任意整数$i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，

都有 $a_i+i\leqslant a_j+j$.

所以 $(1,2,3,\cdots,n)\in B_n$，　所以 $A_n\subseteq B_n$.　　[7 分]

所以集合$A_n\cap B_n$的元素个数为 1.　　[8 分]

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$b_n\neq 0$.

因为$B_2=\{(1,2),(2,1)\}$，所以$b_2=2$.

当$n\geqslant 3$时，考虑B_n中的元素$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$.

（1）假设 $a_k=n\ (1\leqslant k<n)$．由已知，$a_k+k\leqslant a_{k+1}+(k+1)$，

所以 $a_{k+1}\geqslant a_k+k-(k+1)=n-1$，

又因为 $a_{k+1}\leqslant n-1$，所以 $a_{k+1}=n-1$．

依此类推，若 $a_k=n$，则 $a_{k+1}=n-1$，$a_{k+2}=n-2$，⋯，$a_n=k$．

① 若 $k=1$，则满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 1 个．

② 若 $k=2$，则 $a_2=n$，$a_3=n-1$，$a_4=n-2$，⋯，$a_n=2$．

所以 $a_1=1$．

此时 满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 1 个．

③ 若 $2<k<n$，

只要 $(a_1,a_2,a_3,\cdots a_{k-1})$ 是 $1,2,3,\cdots,k-1$ 的满足条件的一个排列，就可以相应得到 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个满足条件的排列．

此时，满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 b_{k-1} 个．　　　　[10 分]

（2）假设 $a_n=n$，只需 $(a_1,a_2,a_3,\cdots a_{n-1})$ 是 $1,2,3,\cdots,n-1$ 的满足条件的排列，

此时 满足条件的 $1,2,3,\cdots,n$ 的排列 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 有 b_{n-1} 个．

综上 $b_n=1+1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}$，$n\geqslant 3$．

因为 $b_3=1+1+b_2=4=2b_2$，

且当 $n\geqslant 4$ 时，$b_n=(1+1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-2})+b_{n-1}=2b_{n-1}$，　　　　[12 分]

所以 对任意 $n\in\mathrm{N}^*$，$n\geqslant 3$，都有 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=2$．

所以 $\{b_n\}$ 成等比数列．　　　　[13 分]