

# 2024 年普通高等学校招生全国统一考试仿真试题

## 数学(二)

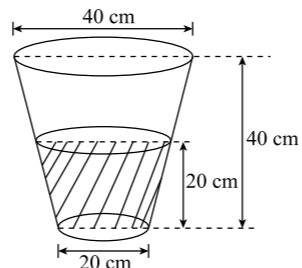
本试卷共 4 页,19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

### 注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

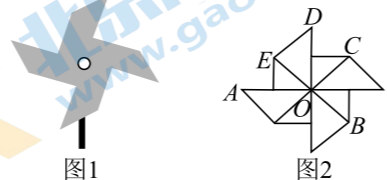
### 一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 用分层抽样的方法从某社区的 500 名男居民和 700 名女居民中选取 12 人参与社区服务满意度调研,则女居民比男居民多选取
  - A. 8 人
  - B. 6 人
  - C. 4 人
  - D. 2 人
2. 若集合  $M = \{y | y = \ln(4 - x^2)\}$ ,  $N = [-2, 2]$ , 则  $M \cap N =$ 
  - A.  $[-2, 2]$
  - B.  $(-2, 2)$
  - C.  $(-\infty, 2]$
  - D.  $[-2, \ln 4]$
3. 最早的测雨器记载见于南宋数学家秦九韶所著的《数书九章》(1247 年)。该书第二章为“天时类”,收录了有关降水量计算的四个例子,分别是“天池测雨”、“圆罍测雨”、“峻积验雪”和“竹器验雪”。如图“竹器验雪”法是下雪时用一个圆台形的器皿收集雪量(平地降雪厚度 = 器皿中积雪体积除以器皿口面积),已知数据如图(注意:单位 cm),则平地降雪厚度的近似值为
  - A.  $\frac{91}{12}$  cm
  - B.  $\frac{31}{4}$  cm
  - C.  $\frac{95}{12}$  cm
  - D.  $\frac{97}{12}$  cm



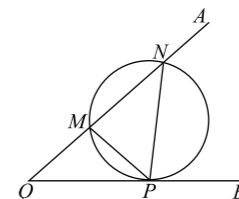
4. 抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 且  $C$  与椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  在第一象限的交点为  $A$ , 若  $AF \perp x$  轴, 则  $p =$ 
  - A.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
  - B. 1
  - C. 2
  - D.  $\frac{2}{3}$

5. 如图 1, 儿童玩具纸风车的做法体现了数学的对称美, 取一张正方形纸折出“十”字折痕, 然后把四个角向中心点翻折, 再展开, 把正方形纸两条对边分别向中线对折, 把长方形短的一边沿折痕向外侧翻折, 然后把立起来的部分向下翻折压平, 另一端折法相同, 把右上角的角向上翻折, 左下角的角向下翻折, 这样, 纸风车的主体部分就完成了, 如图 2, 是一个纸风车示意图, 则
  - A.  $\vec{OC} = \vec{OE}$
  - B.  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0$
  - C.  $\vec{OA} + \vec{OD} = 2\vec{OE}$
  - D.  $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} = \mathbf{0}$



6. 设  $A, B$  为两个事件, 已知  $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}, P(A|\bar{B}) = \frac{1}{2}$ , 则  $P(A|B) =$ 
  - A.  $\frac{2}{3}$
  - B.  $\frac{1}{3}$
  - C.  $\frac{3}{5}$
  - D.  $\frac{2}{5}$

7. 几何学史上有一个著名的米勒问题:“设点  $M, N$  是锐角  $\angle AQB$  的一边  $QA$  上的两点, 试在边  $QB$  上找一点  $P$ , 使得  $\angle MPN$  最大。”如图, 其结论是: 点  $P$  为过  $M, N$  两点且和射线  $QB$  相切的圆与射线  $QB$  的切点。根据以上结论解决以下问题: 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 给定两点  $M(0, 2), N(2, 4)$ , 点  $P$  在  $x$  轴上移动, 当  $\angle MPN$  取最大值时, 点  $P$  的横坐标是
  - A. 2
  - B. 6
  - C. 2 或 6
  - D. 1 或 3



8. 若  $a = 0.001 + \sin 0.001, b = \ln 1.001, c = e^{0.001} - 1$ , 则
  - A.  $b > c > a$
  - B.  $c > a > b$
  - C.  $c > b > a$
  - D.  $a > c > b$

### 二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得 3 分,有选错的得 0 分。

9. 已知直线  $l, m$ , 平面  $\alpha, \beta$ , 则下列说法错误的是
  - A.  $m \parallel l, l \parallel \alpha$ , 则  $m \parallel \alpha$
  - B.  $l \parallel \beta, m \parallel \beta, l \subset \alpha, m \subset \alpha$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
  - C.  $l \parallel m, l \subset \alpha, m \subset \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
  - D.  $l \parallel \beta, m \parallel \beta, l \subset \alpha, m \subset \alpha, l \cap m = M$ , 则  $\alpha \parallel \beta$
10. 已知  $f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ , 则
  - A. 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$
  - B. 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位, 所得图象关于  $y$  轴对称
  - C. 函数  $f(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减
  - D. 若  $f(\theta) = \frac{1}{2}$ , 则  $8 \tan(\theta + \frac{\pi}{6}) - \tan^2(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$
11. 若  $x, y$  满足  $(x+y)^2 - \frac{8}{3}xy = 2$ , 则
  - A.  $y - x \geq -\sqrt{3}$
  - B.  $y - x < 2$
  - C.  $xy > \frac{3}{2}$
  - D.  $xy \geq -\frac{3}{4}$

### 三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 若复数  $z = 3 - 4i + |3 - 4i|$ , 则  $|z| =$  \_\_\_\_\_.
13. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, 2a_{n+1} - a_n + a_n a_{n+1} = 0 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 则数列  $\{a_n\}$  的通项公式为 \_\_\_\_\_.
14. 已知  $P$  是双曲线  $C: \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = \lambda (\lambda > 0)$  上任意一点, 若  $P$  到  $C$  的两条渐近线的距离之积为  $\frac{2}{3}$ , 则  $C$  上的点到焦点距离的最小值为 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知在  $\triangle ABC$  中,三边  $a, b, c$  所对的角分别为  $A, B, C$ , 已知  $a(\cos A + \cos B \cos C) = \sqrt{3} b \sin A \cos C$ .

- (1) 求  $C$ ;
- (2) 若  $a=2$ ,  $\triangle ABC$  外接圆的直径为 4, 求  $\triangle ABC$  的面积.

16. (本小题满分 15 分)

某高中为了了解高中学生暑假期间阅读古典名著的时间  $x$  (小时/每周) 和他们的语文成绩  $y$  (分) 的关系, 某实验小组做了调查, 得到一些数据 (表一).

表一

|          |    |    |    |     |     |
|----------|----|----|----|-----|-----|
| 编号       | 1  | 2  | 3  | 4   | 5   |
| 学习时间 $x$ | 2  | 4  | 7  | 7   | 10  |
| 语文成绩 $y$ | 82 | 93 | 95 | 108 | 122 |

- (1) 请根据所给数据求出语文成绩  $y$  的平均数和方差;
- (2) 基于上述调查, 学校为了确认学生喜欢阅读古典名著与语文成绩的关系, 抽样调查了 200 位学生. 按照是否喜欢阅读古典名著与语文成绩是否优秀统计, 得到下列数据, 请依据表中数据及小概率值  $\alpha=0.01$  的独立性检验, 分析“喜欢阅读古典名著与语文成绩优秀”是否有关.

表二

|       |        |         |     |
|-------|--------|---------|-----|
|       | 语文成绩优秀 | 语文成绩不优秀 | 合计  |
| 喜欢阅读  | 75     | 25      | 100 |
| 不喜欢阅读 | 55     | 45      | 100 |
| 合计    | 130    | 70      | 200 |

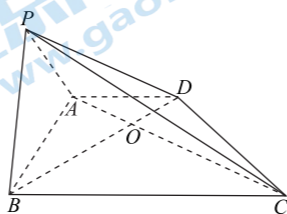
$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

|            |       |       |       |
|------------|-------|-------|-------|
| $\alpha$   | 0.10  | 0.05  | 0.010 |
| $x_\alpha$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 |

17. (本小题满分 15 分)

如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA=PB=AB=AD=2, BC=4, AD \parallel BC, AD \perp AB, AC$  与  $BD$  交于点  $O$ , 过点  $O$  作平行于平面  $PAB$  的平面  $\alpha$ .

- (1) 若平面  $\alpha$  分别交  $PC, BC$  于点  $E, F$ , 求  $\triangle OEF$  的周长;
- (2) 当  $PD=2\sqrt{2}$  时, 求平面  $\alpha$  与平面  $PCD$  夹角的正弦值.



18. (本小题满分 17 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ ,  $O$  为坐标原点, 若椭圆  $C'$  与椭圆  $C$  的离心率相同, 焦点都在同一坐标轴上, 椭圆  $C'$  的长轴长与椭圆  $C$  的长轴长之比为  $1:\sqrt{2}$ .

- (1) 求椭圆  $C'$  的方程;
- (2) 已知点  $P$  在椭圆  $C$  上, 点  $A, B$  在椭圆  $C'$  上, 若  $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$ , 则四边形  $OAPB$  的面积是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

19. (本小题满分 17 分)

若一个两位正整数  $m$  的个位数为 4, 则称  $m$  为“好数”.

- (1) 求证: 对任意“好数” $m, m^2 - 16$  一定为 20 的倍数;
- (2) 若  $m = p^2 - q^2$ , 且  $p, q$  为正整数, 则称数对  $(p, q)$  为“友好数对”, 规定:  $H(m) = \frac{q}{p}$ ,

例如  $24 = 5^2 - 1^2$ , 称数对  $(5, 1)$  为“友好数对”, 则  $H(24) = \frac{1}{5}$ , 求小于 70 的“好数”中, 所有“友好数对”的  $H(m)$  的最大值.