北京市昌平区 2015～2016 学年度高一上学期期末

数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

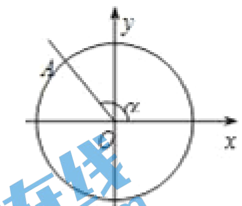
1．已知集合$U=\{0,1,2,3,4\}$，$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{0,2,4\}$，那么$A\cap(C_U B)$等于（　　）.

A．$\{1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{1,3\}$　　D．$\{0,1,2,3\}$

2．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,3-m)$，且$\vec{a}//\vec{b}$，那么实数m的值是（　　）.

A．-1　　B．1　　C．4　　D．7

3．如图所示，在平面直角坐标系xOy中，角α的终边与单位圆交于点A．若点A的纵坐标是$\frac{4}{5}$，那么$\sin\alpha$的值是（　　）.

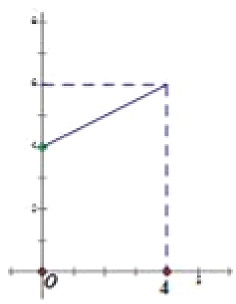


A．$\frac{3}{5}$．B．$\frac{4}{5}$　C．$\frac{3}{4}$　D．$\frac{4}{3}$

4．已知函数$f(x)=2^x+2x-6$的零点为x_0，那么x_0所在的区间是（　　）.

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

5．已知函数$f(x)$是定义在$[-4,0)\cup(0,4]$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)$的图象如图所示，那么$f(x)$的值域是（　　）.



A．$(-4,4)$　　B．$[-6,6]$　　C．$(-4,4)\cup(4,6]$　　D．$[-6,-4)\cup(4,6]$

6．已知函数 $y=\sin 2x$ 的图象为 C，为了得到函数 $y=\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$ 的图象，只要把 C 上所有的点（　　）.

A．向左平行移动 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度

B．向右平行移动 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度

C．向左平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

D．向右平行移动 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

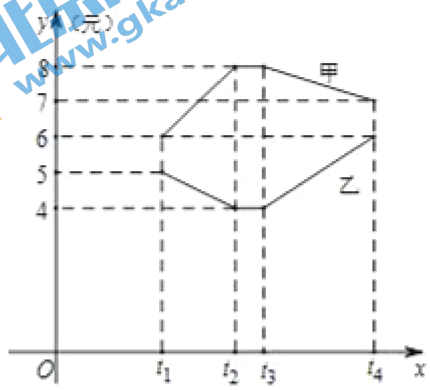
7．已知 $a=2^{\frac{1}{3}}$， $b=3^{-\frac{1}{3}}$， $c=\log_2\dfrac{1}{3}$，那么 a， b， c 的大小关系是（　　）.

A． $c<a<b$　B． $c<b<a$　C． $a<b<c$　D． $b<a<c$

8．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(4-x)$，且在区间 $[0,2]$ 上是增函数，那么（　　）.

A． $f(6)<f(4)<f(1)$　B． $f(4)<f(6)<f(1)$　C． $f(1)<f(6)<f(4)$　D． $f(6)<f(1)<f(4)$

9．甲、乙两种商品在过去一段时间内的价格走势如图所示．假设某人持有资金120万元，他可以在 t_1 至 t_4 的任意时刻买卖这两种商品，且买卖能够立即成交（其他费用忽略不计）．如果他在 t_4 时刻卖出所有商品，那么他将获得的最大利润是（　　）.



A． 40万元　B． 60万元　C． 120万元　D． 140万元

10．已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，若对于任意 x_1， $x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$，那么函数 $f(x)$ 称为“Ω 函数”．给出下列函数：

① $f(x)=\cos x$；

② $f(x)=2^x$；

③ $f(x)=x|x|$；

④ $f(x)=\ln(x^2+1)$.

其中“Ω 函数”的个数是（　　）.

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

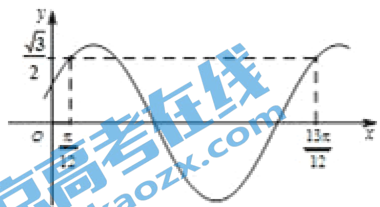
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 6 分，共 30 分.

11．已知函数 $f(x)=x^a$ 的图象经过点 $(3,\dfrac{1}{27})$，那么实数 a 的值等于__________.

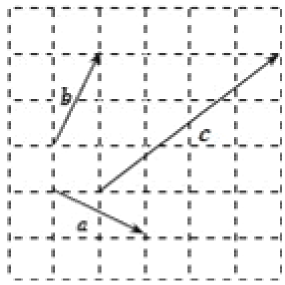
12．已知 $\sin(\pi-\alpha)=\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，那么 $\tan\alpha=$__________.

13．已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^x, x\geq 3\\ -8x, x<3\end{cases}$. 如果 $f(x_0)=16$，那么实数 x_0 的值是__________.

14. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，那么 $\omega=$__________，$\varphi=$__________.



15. 如图，在 6×6 的方格中，已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 的起点和终点均在格点，且满足向量 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ $(x,y\in\mathbf{R})$，那么 $x+y=$__________.



16．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若同时满足以下两个条件：

①函数 $f(x)$ 在 D 内是单调递减函数；

②存在区间 $[a,b]\subseteq D$，使函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内的值域是 $[-b,-a]$.

那么称函数 $f(x)$ 为“W 函数”.

已知函数 $f(x)=-\sqrt{x}-k$ 为“W 函数”.

（1）当 $k=0$ 时，$b-a$ 的值是__________；

（2）实数 k 的取值范围是__________.

三、解答题（共 5 个小题，共 70 分）

17．已知向量 $\vec{a}=(2,-1)$，$\vec{b}=(1,x)$．

（Ⅰ）若 $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，求 $|\vec{b}|$ 的值；

（Ⅱ）若 $\vec{a}+2\vec{b}=(4,-7)$，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小．

18．已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅲ）当 $x\in(0,\frac{2\pi}{3})$ 时，求函数 $f(x)$ 的最小值，并求出使 $y=f(x)$ 取得最小值时相应的 x 值．

19．已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3+x)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$.

（Ⅰ） 求 $f(1)$ 的值；

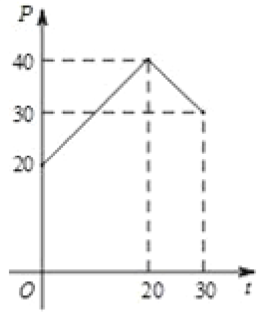
（Ⅱ） 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并加以证明；

（Ⅲ）若 $f(2x)>0$，求实数 x 的取值范围.

20．据市场调查发现，某种产品在投放市场的30天中，其销售价格P（元）和时间t $(t\in\mathbf{N})$（天）的关系如图所示．

（Ⅰ） 求销售价格P（元）和时间t（天）的函数关系式；

（Ⅱ）若日销售量Q（件）与时间t（天）的函数关系式是$Q=-t+40(0\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})$，问该产品投放市场第几天时，日销售额$y$（元）最高，且最高为多少元？



21. 已知函数 $f(x)$，对于任意的 x，$y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $f(1)=-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ） 求 $f(0)$， $f(3)$ 的值；

（Ⅱ） 当 $-8\leqslant x\leqslant 10$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值；

（Ⅲ） 设函数 $g(x)=f(x^2-m)-2f(|x|)$，判断函数 $g(x)$ 最多有几个零点，并求出此时实数 m 的取值范围.

北京市昌平区 2015～2016 学年度高一上学期期末数学试卷

数学答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	B	D	C	B	A	C	B

二、填空题

题号	11	12	13	14	15	16
答案	-3	$\frac{3}{4}$	-2	2，$\frac{\pi}{6}$	3	1，$\left(-\frac{1}{4},0\right]$

三、解答题

17.

解：（Ⅰ）依题意可得， $\vec{a}+\vec{b}=(3,-1+x)$，

由 $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，可得， $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$，

即 $6+1-x=0$，

解得 $x=7$，即 $\vec{b}=(1,7)$，

所以 $|\vec{b}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$；

（Ⅱ）依题意 $\vec{a}+2\vec{b}=(4,2x-1)=(4,-7)$，

可得 $x=-3$，即 $\vec{b}=(1,-3)$，

所以 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2+3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，

所以 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角大小是 $\frac{\pi}{4}$.

18.

解：（Ⅰ）对于函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，它的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，求得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi)\ (k\in\mathbf{Z})$.

（III）$\because 0\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，$\therefore 0\leqslant 2x\leqslant\frac{4\pi}{3}$，即 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$.

所以函数 $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$，此时，$x=0$，或 $x=\frac{2\pi}{3}$.

19.

解：（I）$f(1)=\log_{\frac{1}{2}}4+\log_{\frac{1}{2}}2=-2-1=-3$.

（II） 函数 $f(x)$ 是偶函数.

证明：由函数有意义得 $\begin{cases}3+x>0\\3-x>0\end{cases}$，解得 $-3<x<3$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|-3<x<3\}$.

$\because f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)+\log_{\frac{1}{2}}(3+x)=f(x)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3+x)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$ 是偶函数.

（III） 由 $f(2x)>0$ 可得 $\log_{\frac{1}{2}}(9-(2x)^2)>\log_{\frac{1}{2}}1$.

$\therefore\begin{cases}-3<2x<3\\9-(2x)^2<1\end{cases}$，解得 $-\frac{3}{2}<x<-\sqrt{2}$，或 $\sqrt{2}<x<\frac{3}{2}$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $(-\frac{3}{2},-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\frac{3}{2})$.

20.

解：（I）①当 $0\leqslant t<20$，$t\in\mathbf{N}$ 时，

设 $P=at+b$，将 $(0,20)$，代入，得 $\begin{cases}20=b\\40=20a+b\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1\\b=20\end{cases}$.

所以 $P=t+20\ (0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N})$.

②当 $20\leqslant t\leqslant 30$，$t\in\mathbf{N}$ 时，

设 $P=at+b$，将 $(30,30)$ 代入，解得 $\begin{cases}a=-1\\b=60\end{cases}$.

所以 $P=-t+60$，$(20\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})$.

综上所述 $P=\begin{cases}t+20(0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N})\\-t+60(20\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})\end{cases}$.

（II）依题意，有 $y=P\cdot Q$，

得 $y=\begin{cases}(t+20)(-t+40)(0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N})\\(-t+60)(-t+40)(20\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})\end{cases}$.

化简得 $y=\begin{cases}-t^2+20t+800(0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N})\\ t^2-100t+2400(20\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})\end{cases}$.

整理得 $y=\begin{cases}-(t-10)^2+900(0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N})\\ (t-50)^2-100(20\leqslant t\leqslant 30,t\in\mathbf{N})\end{cases}$.

①当 $0\leqslant t<20$，$t\in\mathbf{N}$ 时，由 $y=-(t-10)^2+900$ 可得，当 $t=10$ 时，y 有最大值 900 元.

②当 $20\leqslant t\leqslant 30$，$t\in\mathbf{N}$ 时，由 $y=(t-50)^2-100$ 可得，当 $t=20$ 时，y 有最大值 800 元.

因为 $900>800$，所以在第 10 天时，日销售额最大，最大值为 900 元.

21.

解：（Ⅰ）令 $x=y=0$ 得 $f(0)=f(0)+f(0)$，得 $f(0)=0$.

令 $x=y=1$，得 $f(2)=2f(1)=-1$，

令 $x=2$，$y=1$ 得 $f(3)=f(2)+f(1)=-\dfrac{3}{2}$.

（Ⅱ）任取 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，$x_2-x_1>0$，

因为 $f(x+y)-f(x)=f(y)$，即 $f(x+y)-f(x)=f[(x+y)-x]=f(y)$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)$.

由已知 $x>0$ 时，$f(x)<0$ 且 $x_2-x_1>0$，则 $f(x_2-x_1)<0$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，$f(x_2)<f(x_1)$，

所以 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

故 $f(x)$ 在 $[-8,10]$ 单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f(-8)$，$f(x)_{\min}=f(10)$，

又 $f(10)=2f(5)=2[f(2)+f(3)]=2(-1-\dfrac{3}{2})=-5$，

由 $f(0)=f(1-1)=f(1)+f(-1)=0$，得 $f(-1)=\dfrac{1}{2}$，

$f(-8)=2f(-4)=4f(-2)=8f(-1)=8\times\dfrac{1}{2}=4$，

故 $f(x)_{\max}=4$，$f(x)_{\min}=-5$.

（Ⅲ） 令 $y=-x$，代入 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，

得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$，

所以 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

$\therefore g(x)=f(x^2-m)-2f(|x|)=f(x^2-m)+2f(-|x|)=f(x^2-m)+f(-|x|)+f(-|x|)=f(x^2-2|x|-m)$.

令 $g(x)=0$ 即 $f(x^2-2|x|-m)=0=f(0)$，

因为 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，

所以 $x^2-2|x|-m=0$，即 $m=x^2-2|x|$，

所以 当 $m\in(-1,0)$ 时，函数 $g(x)$ 最多有 4 个零点.

北京市昌平区 2015～2016 学年度高一上学期期末数学试卷

数学试卷部分解析

一、 选择题

1.【答案】C

【解析】：∵ $U=\{0,1,2,3,4\}$， $A=\{0,1,2,3\}$， $B=\{0,2,4\}$，

∴ $(C_U B)=\{1,3\}$

∴ $A\cap(C_U B)=\{1,3\}$

故选：C．

2.【答案】A

【解析】∵向量 $\vec{a}=(1,2)$， $\vec{b}=(2,3-m)$， 且 $\vec{a}//\vec{b}$，

∴ $1\times(3-m)=2\times2$，

∴ $m=-1$，

故选：A．

3.【答案】B

【解析】由题意可得，点 A 的纵坐标是 $\dfrac{4}{5}$， 那么 $\sin\alpha$ 的值是 $\dfrac{4}{5}$，

故选：B

4.【答案】B

【解析】∵函数 $f(x)=2^x+2x-6$ 为增函数，

∴ $f(1)=2+2-6=-2<0$， $f(2)=2^2+2\times2-6=2>0$，

则函数在 $(1,2)$ 内存在零点，

x_0 所在的区间是 $(1,2)$，

故选：B．

5.【答案】D

【解析】∵当 $0<x\leqslant4$ 时，函数单调递增，由图象知 $4<f(x)\leqslant6$，

当 $-4\leqslant x<0$ 时，在 $0<-x\leqslant4$，即此时函数也单调递增，

且 $4<f(-x)\leqslant6$，

∵函数是奇函数，

∴ $f(-x)=-f(x)$,

∴ $4<-f(x)\leqslant 6$,

即 $-6\leqslant f(x)<-4$,

∴ $f(x)$ 的值域是 $[-6,-4)\cup(4,6]$,

故选：D

6.【答案】C

【解析】 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})=\sin 2(x+\frac{\pi}{3})$,

即为了得到函数 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象，只要把 C 上所有的点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可，

故选：C.

7.【答案】B

【解析】解：∵ $a=2^{\frac{1}{3}}>2^0=1$，

$0<b=3^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}<1$,

$c=\log_2\frac{1}{3}<\log_2 1=0$,

∴ $c<b<a$.

故选：B.

8.【答案】A

【解析】∵ $f(x)=f(4-x)$,

∴函数 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，

则∵奇函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上是增函数，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上是增函数，

则函数 $f(x)$ 在在区间 $[2,6]$ 上是减函数，

则 $f(1)=f(3)$,

∵ $f(6)<f(4)<f(3)$,

∴ $f(6)<f(4)<f(1)$,

故选：A

9.【答案】C

【解析】甲在6元时，全部买入，可以买$120\div 6=20$（万）份，在t_2时刻，全部卖出，此时获利$20\times 2=40$万，

乙在4元时，买入，可以买$(120+40)\div 4=40$（万）份，在t_4时刻，全部卖出，此时获利$40\times 2=80$万，

共获利$40+80=120$万，

故选：C

10.【答案】B

【解析】对于任意x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且$x_1\ne x_2$，$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_1f(x_2)+x_2f(x_1)$恒成立；

$\therefore (x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$恒成立；

$\therefore$ $f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数；

① $f(x)=\cos x$在$\mathbf{R}$上没有单调性，

$\therefore$该函数不是"Ω函数"；

② $f(x)=2^x$在$\mathbf{R}$上为增函数，

$\therefore$该函数是"Ω函数"；

③ $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0\\-x^2,x<0\end{cases}$；

$\therefore$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，在$(-\infty,0)$上单调递增，且$0^2=-0^2$；

$\therefore$ $f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数，

$\therefore$该函数是"Ω函数"；

④令$x^2+1=t$，$t\geqslant 1$，则$y=\ln t$在$[1,+\infty)$上单调递增，而$t=x^2+1$在$\mathbf{R}$上没有单调性；

$\therefore$ $f(x)$在$\mathbf{R}$上没有单调性，

$\therefore$该函数不是"Ω函数"；

$\therefore$"Ω函数"的个数是2.

故选：B.

二、填空题

11.【答案】-3

$\because$幂函数$f(x)=x^a$的图象经过点$(3,\dfrac{1}{27})$，

$\therefore 3^a=\dfrac{1}{27}=3^{-3}$，

解得：$a=-3$，

故答案为：-3.

12．【答案】$\frac{3}{4}$

【解析】∵已知 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}=\sin\alpha$，且 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，

∴ $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$，

那么 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$，

故答案为：$\frac{3}{4}$．

13．【答案】-2

【解析】当 $x<3$ 时，$-8x_0=16$，解得 $x_0=-2$，满足条件．

当 $x\geqslant3$ 时，$4^{x_0}=16$，解得 $x_0=2$，不满足条件．

综上可得：$x_0=-2$．

故答案为：-2．

14．【答案】2，$\frac{\pi}{6}$

【解析】函数的周期 $T=\frac{13\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\pi$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，

则 $\omega=2$，$x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(\frac{\pi}{12})=\sin(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即 $\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∵ $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

∴ $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

则 $-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\varphi<\frac{2\pi}{3}$，

则 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{3}$，

即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

故答案为：2，$\frac{\pi}{6}$．

15．【答案】3

【解析】分别设方向水平向右和向上的单位向量为$\vec{i}$，$\vec{j}$，则$\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}$，$\vec{c}=4\vec{i}+3\vec{j}$．

又∵$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}=(2x+y)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}$，

∴$\begin{cases}2x+y=4\\2y-x=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$．

∴$x+y=3$．

16．【答案】1，$\left(-\frac{1}{4},0\right]$

【解析】根据题意知，“W函数”在定义域D上需满足：方程$f(x)=-x$至少有两个不同的实数根；

（1）$k=0$时，解$-\sqrt{x}=-x$得，$x=0$，或1；

∴$a=0$，$b=1$；

∴$b-a=1$；

（2）令$\sqrt{x}=t(t\geqslant 0)$，由方程$-\sqrt{x}-k=-x$得，$-t-k=-t^2$；

∴$t^2-t-k=0$在$[0,+\infty)$上有两个不同实数根；

设$g(t)=t^2-t-k$，则：$\begin{cases}\Delta=1+4k>0\\g(0)=-k\geqslant 0\end{cases}$；

解得$-\frac{1}{4}<k\leqslant 0$；

∴实数k的取值范围为$\left(-\frac{1}{4},0\right]$．

故答案为：1，$\left(-\frac{1}{4},0\right]$．