2023 北京广渠门中学高三 10 月月考

数　　学

时间 120 分钟　满分 150 分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 设集合 $U=\{0,1,2,3,4,5\},A=\{1,2\},B=\{x\in Z\,|\,x^2-5x+4<0\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　）

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{5\}$　　C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{0,4,5\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{1-i}{2i}$（其中 i 是虚数单位），则 $|z|=$（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. 2

3. 已知 $a,b,c\in\mathrm{R}$，那么下列命题中正确的是（　）.

A. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$

B. 若 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$，则 $a>b$

C. 若 $a>b$ 且 $ab<0$，则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

D. 若 $a^2>b^2$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

4. 下列函数中，是奇函数且在定义域内单调递减的是（　）

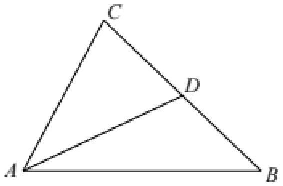
A. $f(x)=\sin x$

B. $f(x)=2^{|x|}$

C. $f(x)=x^3+x$

D. $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点．若 $\overrightarrow{BA}=\vec{a},\overrightarrow{DA}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AC}=$（　）



A. $3\vec{a}-2\vec{b}$　　B. $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$　　C. $-\vec{a}+2\vec{b}$　　D. $\vec{a}-2\vec{b}$

6. 由实数组成的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则"$a_1>0$"是"$S_3>S_2$"的（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}+a,x>0\\ x,x<0\end{cases}$，若 $y=f(x)$ 的图象上存在两个点 A,B 关于原点对称，则实数 a 的取

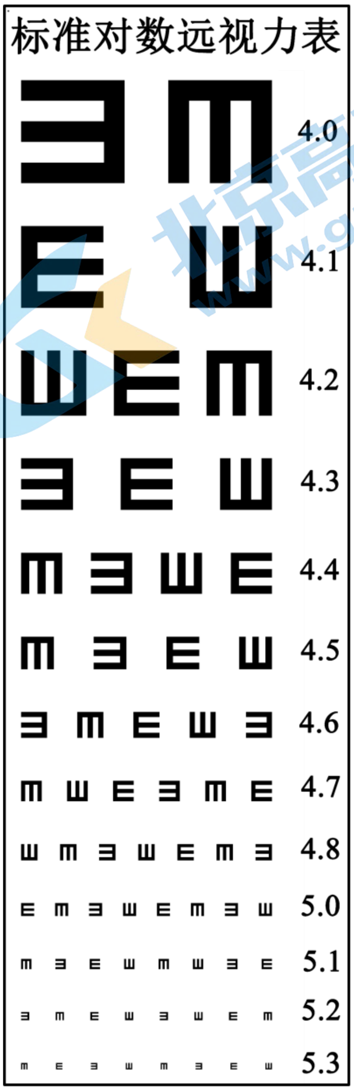
值范围是（   ）

A. $[1,+\infty)$　　　　B. $(1,+\infty)$　　　　C. $[-1,+\infty)$　　　　D. $(-1,+\infty)$

8. 已知非零向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为120°，且$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，则向量$\vec{a}$与$\vec{c}$的夹角为（   ）

A. 60°　　　　B. 90°　　　　C. 120°　　　　D. 150°

9. 标准对数远视力表(如图)采用的“五分记录法”是我国独创的视力记录方式，标准对数远视力表各行为正方形“*E*”形视标，且从视力5.2的视标所在行开始往上，每一行“*E*”的边长都是下方一行“*E*”边长的$\sqrt[10]{10}$倍，若视力4.1的视标边长为a，则视力4.9的视标边长为（   ）



A. $10^{-\frac{9}{10}}a$　　　　B. $10^{-\frac{4}{5}}a$　　　　C. $10^{\frac{4}{5}}a$　　　　D. $10^{\frac{9}{10}}a$

10. 已知函数$f(x)=\sin\omega x+\dfrac{x-2}{x+2}(\omega>0)$在$[0,2]$上恰有4个不同的零点，则实数$\omega$的取值范围为（   ）

A. $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$　　　　B. $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$　　　　C. $\left(2\pi,\dfrac{5}{2}\pi\right]$　　　　D. $\left[2\pi,\dfrac{5}{2}\pi\right)$

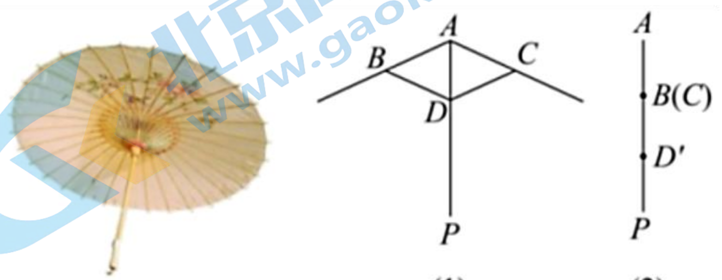
二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

11. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,-2)$，$\vec{c}=(1,\lambda)$．若 $\vec{c}\parallel(2\vec{a}+\vec{b})$，则 $\lambda=$________.

12. 已知角 α 的顶点在坐标原点，始边与 x 轴的正半轴重合，将角 α 的终边按逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{6}$ 后经过点 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\sin\alpha=$________.

13. 已知函数 $f(x)=3^x-2x-1$，则函数 $f(x)$ 有________个零点，不等式 $f(x)>0$ 的解集为________.

14. 我国油纸伞的制作工艺巧妙．如图（1），伞不管是张开还是收拢，伞柄 AP 始终平分同一平面内两条伞骨所成的角 $\angle BAC$，且 $AB=AC$，从而保证伞圈 D 能够沿着伞柄滑动．如图（2），伞完全收拢时，伞圈 D 已滑动到 D' 的位置，且 A、B、D' 三点共线，$AD'=40\text{cm}$，B 为 AD' 的中点，当伞从完全张开到完全收拢，伞圈 D 沿着伞柄向下滑动的距离为 24cm，则当伞完全张开时，$\angle BAC$ 的余弦值是________.



(1)　　(2)

15. 已知无穷项数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，$a_1,a_2$ 为有理数，给出下列四个结论：

①若 $a_3>a_2>a_1$，则数列 $\{a_n\}$ 单调递增；

②数列 $\{a_n\}$ 可能为等比数列；

③若存在 $k_0\in\mathrm{N}^*,k_0\geq3,a_{k_0}=0$，则对于任意 $n\leq k_0-2$，总有 $a_na_{n+1}\leq0$．

④若存在 $M>0$，对于任意 $n\in\mathrm{N}^*$，总有 $|a_n|<M$，则 $a_n=0$．

其中全部正确结论的序号为________.

三、解答题（共 85 分）

16. 已知 $\overrightarrow{m}=(2\sin x,\sin x-\cos x)$，$\overrightarrow{n}=(\sqrt{3}\cos x,\sin x+\cos x)$，记函数 $f(x)=\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$．

（1）求函数 $f(x)$ 取最大值时 x 的取值集合；

（2）设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2},m\right]$ 是减函数，求实数 m 的最大值．

17. 已知公差为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,2a_1,a_3-1,a_4+1$ 成等比数列．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 a_2,a_5 分别是等比数列 $\{b_n\}$ 的第 1 项和第 2 项，求使数列 $\left\{\dfrac{2}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n<\dfrac{299}{300}$ 的最大正整数 n.

18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x-b}{(x-1)^2}$，

（1）当 $b=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 的最小值；

（2）求 $f(x)$ 的单调减区间.

（3）若 $f(x)$ 有最小值，请直接写出 b 的取值范围.

19. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，$c=2$.

（1）求 $\angle A$；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上高线的长.

条件①：$\sin C=\dfrac{2}{a}$；

条件②：$b=1+\sqrt{3}$；

条件③：$a=\sqrt{2}$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

20. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x+b$，且曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处与 x 轴相切.

（1）求 a,b 的值；

（2）令 $g(x)=f'(x)$，证明函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（3）求 $f(x)$ 的极值点个数.

21. 无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1\in\mathrm{R}^+$，且当 $n\geq 2$ 时有：$|a_n-a_{n-1}|=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$（表示最大项）.

（1）若 $a_1=2$，求 a_3 的所有可能值；

（2）若存在正整数 T，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+T}=a_n$，证明：a_1 是数列各项中的最大项；

（3）在（2）的条件下，$a_m=a_1, m=1,2,3\cdots2022$，试求 m 的所有取值的个数.

参考答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1.【答案】D

【分析】

先求出集合 B，即可求出 $A\cup B$，进而求出补集.

【详解】$\because B=\left\{x\in Z\left|x^2-5x+4<0\right.\right\}=\left\{x\in Z\left|1<x<4\right.\right\}=\{2,3\}$，

$\therefore A\cup B=\{1,2,3\}$，

$\therefore \complement_U(A\cup B)=\{0,4,5\}$.

故选：D.

【点睛】本题考查一元二次不等式的解法，考查并集补集混合运算，属于基础题.

2.【答案】A

【分析】

利用复数模长的性质即可求解.

【详解】$\because$ 复数 $z=\dfrac{1-i}{2i}=\dfrac{i-i^2}{2i^2}=\dfrac{1+i}{-2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，

$\therefore |z|=\sqrt{(-\dfrac{1}{2})^2+(-\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：A.

【点睛】本题考查求复数的模，涉及到复数的除法运算，考查学生的基本计算能力，是一道容易题.

3.【答案】C

【分析】根据不等式的性质或通过举反例，对四个选项进行分析得解.

【详解】A．若 $a>b$，当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，所以选项 A 不成立；

B．若 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$，当 $c<0$ 时，则 $a<b$，所以选项 B 不成立；

C．因为 $ab<0$，将 $a>b$ 两边同除以 ab，则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，所以选项 C 成立；

D．如果 $a=2,b=-1$，满足 $a^2>b^2$，但是 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$，所以选项 D 不成立.

故选：C.

4.【答案】D

【分析】根据函数的奇偶性，基本初等函数的单调性，逐项判断即可.

【详解】对于 A，函数 $f(x)=\sin x$ 为奇函数，但在定义域 R 上函数不单调，故 A 不符合；

对于 B，$f(x)=2^{|x|}$ 的定义域为 R，$f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，则 $f(x)=2^{|x|}$ 为偶函数，故 B 不符合；

对于 C，$f(x)=x^3+x$ 的定义域为 R，$f(-x)=-x^3-x=-f(x)$，则 $f(x)=x^3+x$ 为奇函数，又函数 $y=x^3, y=x$ 在 R 上均为增函数，故 $f(x)=x^3+x$ 在 R 上为增函数，故 C 不符合；

对于 D，$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$ 的定义域为 R，$f(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-f(x)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$ 为奇函数，又函数 $y=e^{-x}$ 在 R 上为减函数，$y=e^{x}$ 在 R 上为增函数，故 $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)$ 在 R 上为减函数，故 D 符合.

故选：D.

5.【答案】D

【分析】根据向量的线性运算即可求解.

【详解】$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BA}=2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{BA}=2\vec{b}+2\overrightarrow{AC}-\vec{a}$，

所以 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-2\vec{b}$，

故选：D

6.【答案】C

【分析】根据等比数列的性质以及充分条件和必要条件的定义进行判断即可.

【详解】若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $S_3-S_2=a_3=a_1q^2, q\neq 0$，

若 $a_1>0$，则 $S_3-S_2=a_3=a_1q^2>0$，即 $S_3>S_2$ 成立，

若 $S_3>S_2$ 成立，则 $S_3-S_2=a_3=a_1q^2>0$，即 $a_1>0$，

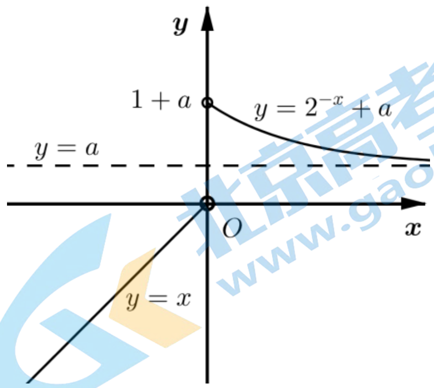
故“$a_1>0$”是“$S_3>S_2$”的充要条件，

故选：C.

7.【答案】D

【分析】根据解析式画出函数草图，数形结合判断图象上存在两个点 A, B 关于原点对称求参数范围即可.

【详解】由函数解析式可得，函数图象如下图示，



如图，要使 $y=f\left(x\right)$ 的图象上存在两个点 A,B 关于原点对称，

只需 $1+a>0$，即 $a>-1$ 即可.

故选：D

8.【答案】B

【分析】根据向量的数量积的定义及运算律可得 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，进而即得.

【详解】$\because \vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$，$\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{a}^2-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos120^\circ=-\vec{a}^2-2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos120^\circ=0$，

$\therefore \vec{a}\perp\vec{c}$，即向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 90°.

故选：B.

9.【答案】B

【分析】设视力 4.9 的视标边长为 x，结合视标图有 $(\sqrt[10]{10})^8x=a$，即可求 x.

【详解】设视力 4.9 的视标边长为 x，则：

$\therefore (\sqrt[10]{10})^8x=a$，即 $x=10^{-\frac{4}{5}}a$.

故选：B.

10.【答案】B

【分析】把函数零点问题转化为两个函数交点问题，数形结合即可求解.

【详解】因为函数 $f\left(x\right)=\sin\omega x+\dfrac{x-2}{x+2}(\omega>0)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上恰有 4 个不同的零点，

则方程 $\sin\omega x+\dfrac{x-2}{x+2}=0$ 在 $\left[0,2\right]$ 上恰有 4 个不同的解，

即方程 $\sin\omega x=\dfrac{2-x}{x+2}$ 在 $\left[0,2\right]$ 上恰有 4 个不同的解，

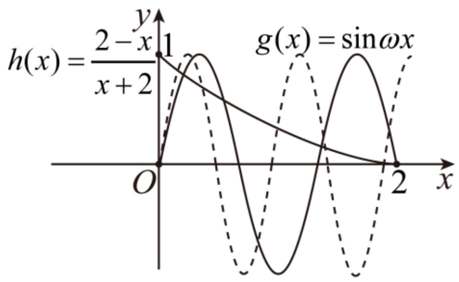
所以函数 $g(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 与函数 $h(x)=\dfrac{2-x}{x+2}$ 在 $\left[0,2\right]$ 上恰有 4 个不同的交点，

因为函数 $h(x)=\dfrac{2-x}{x+2}=-1+\dfrac{4}{x+2}$，且 $y=\dfrac{4}{x+2}$ 在 $\left[0,2\right]$ 上单调递减，

所以函数函数 $h(x)=\dfrac{2-x}{x+2}$ 在 $\left[0,2\right]$ 上单调递减，且 $h(0)=1$，$h(2)=0$，

函数 $g(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 是由 $y=\sin x$ 函数图象纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍，

作出两个函数图象，如图：



要使函数 $g(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 与函数 $h(x)=\frac{2-x}{x+2}$ 在 $[0,2]$ 上恰有 4 个不同的交点，

由图知：$g(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的周期 T 满足 $\frac{3}{2}T\le 2<2T$，所以 $\frac{3\pi}{\omega}\le 2<\frac{4\pi}{\omega}$，

所以 $\frac{3\pi}{2}\le\omega<2\pi$，即实数 ω 的取值范围为 $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$.

故选：B

【点睛】方法点睛：函数零点问题的解决办法：

（1）直接法：根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与 x 轴的交点问题；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由分离变量得出，将问题等价转化为直线与函数的图象的交点问题.

二、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

11.【答案】$\frac{1}{2}$

【分析】由两向量共线的坐标关系计算即可.

【详解】由题可得 $2\vec{a}+\vec{b}=(4,2)$

$\because \vec{c}\,//\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$，$\vec{c}=(1,\lambda)$

$\therefore 4\lambda-2=0$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$

故答案为 $\frac{1}{2}$

【点睛】本题主要考查向量的坐标运算，以及两向量共线的坐标关系，属于基础题.

12.【答案】1

【分析】利用三角函数的定义计算即可.

【详解】易知角 α 的终边按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后得到 $\frac{\pi}{6}+\alpha$，

由题意可知 $\frac{\pi}{6}+\alpha$ 的终边位于第二象限，

且 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\frac{1}{2}$，故 $\frac{\pi}{6}+\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

所以$\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，即$\sin\alpha=1$.

故答案为：1

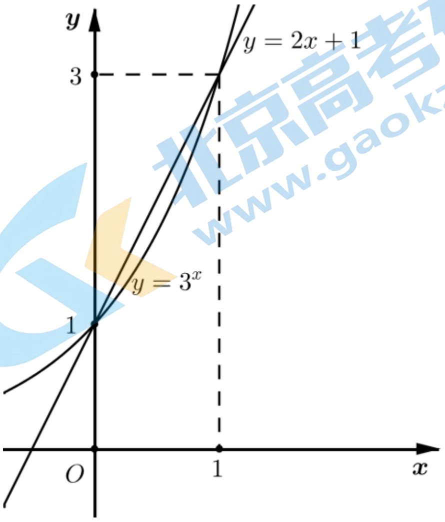
13.【答案】 ①. 2 ②. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

【分析】将零点问题化为$y=3^x$与$y=2x+1$交点个数问题，数形结合判断零点个数，由$f(x)>0$有$3^x>2x+1$，数形结合求解集.

【详解】令$f(x)=3^x-2x-1=0$，则$3^x=2x+1$，

故$y=3^x$与$y=2x+1$交点个数，即为$f(x)$零点个数，

由$y=3^x$、$y=2x+1$在定义域上均递增，且都过$(0,1)$，$(1,3)$，图象如下，



所以两函数有且仅有2个交点，故$f(x)$有2个零点，

由$f(x)>0$，即$3^x>2x+1$，由上图知：$x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：2；$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

14.【答案】$-\dfrac{17}{25}$##-0.68

【分析】根据题意解三角形结合余弦的二倍角公式计算即可.

【详解】由题意可知伞完全张开时，$AD=AD'-DD'=40-24=16$，

又伞完全收拢时，B为AD'的中点，即$AB=BD=\dfrac{AD'}{2}=20$，

在$\triangle ABD$中，由余弦定理可知$\cos\angle BAD=\dfrac{BA^2+DA^2-BD^2}{2BA\cdot DA}=\dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow\cos\angle BAC=\cos(2\angle BAD)=2\cos^2\angle BAD-1=\dfrac{8}{25}-1=-\dfrac{17}{25}$.

故答案为：$-\dfrac{17}{25}$.

15.【答案】①③④

【分析】根据 $a_3>a_2>a_1$ 和 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$ 可判断 $a_1>0$，进而可判断①，

根据等比中项即可得矛盾判断②，根据递推关系，可由 $a_{k_0}=0$，设 $a_{k_0-1}=x$，

即可根据递推关系 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$ 推断出数列的其他项，即可判断③，

根据递推式求出通项公式即可判断④

【详解】对于①，由 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，且 $a_3>a_2>a_1$，所以 $a_3=a_2+a_1>a_2\Rightarrow a_1>0$，

因此 $a_3>a_2>a_1>0$，由 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ 递推可知，

$a_n>0$，所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_n>0$，又 $a_3>a_2>a_1>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，故 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，①正确；

对于②，若 $\{a_n\}$ 为等比数列，显然 a_1,a_2 都不为零，则 $a_3a_1=a_2^2$，

结合 $a_3=a_1+a_2$，因此 $(a_1+a_2)a_1=a_2^2$，

故 $a_2^2-a_1a_2-a_1^2=0\Rightarrow a_2=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}a_1$，故 $a_2^2-a_1a_2-a_1^2=0\Rightarrow\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，这与 a_1,a_2 为有理数矛盾，

故 $\{a_n\}$ 不可能为等比数列，故②错误；

对于③，若存在 $k_0\in\mathrm{N}^*,k_0\geq 3,a_{k_0}=0$，由 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$

可得 $a_{k_0}=a_{k_0-2}+a_{k_0-1}=0\Rightarrow a_{k_0-2}=-a_{k_0-1}$，进而 $a_{k_0-2}a_{k_0-1}=-a_{k_0-1}^2\leq 0$，

又 $a_{k_0-1}=a_{k_0-3}+a_{k_0-2}\Rightarrow -a_{k_0-2}=a_{k_0-3}+a_{k_0-2}\Rightarrow -2a_{k_0-2}=a_{k_0-3}$，

所以 $a_{k_0-3}a_{k_0-2}=-2a_{k_0-2}^2\leq 0$，

依次类推：不妨设 $a_{k_0-1}=x(x\neq 0)$，由于 $a_{k_0}=0$，由 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，

则此时 a_{k_0} 以及其前面的项依次为：$\cdots,13x,-8x,5x,-3x,2x,-x,x,0$，前 k_0-1 项的值

正负交错出现，故对于任意 $n\leq k_0-2$，总有 $a_na_{n+1}\leq 0$.

当 $a_{k_0-1}=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 各项都为零，显然符合题意，③正确；

对于④，当数列 $\{a_n\}$ 各项都为零即 $a_n=0$ 时，显然存在无数个 $M>0$，对于任意 $n\in\mathrm{N}^*$，总有

$|a_n|<M$；

若数列 $\{a_n\}$ 各项不都为零，即 a_1,a_2 中至多一个为零，

因为 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$，设 $a_{n+2}+xa_{n+1}=y(a_{n+1}+xa_n)$，

则 $a_{n+2}=xya_n+(y-x)a_{n+1}$，所以 $xy=1,y-x=1$，即 $x^2+x-1=0$，

解得：$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$.

当 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$ 时，$a_{n+2}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\left(a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_n\right)$，

因为 a_1,a_2 中至多一个为零，且都为有理数，所以 $a_2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_1\neq 0$，

设 $a_2+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_1=\lambda$，

因此数列 $\left\{a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_n\right\}$ 是以 λ 为首项，以 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 为公比的等比数列，

即 $a_{n+1}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a_n=\lambda\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}$ (1).

当 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$ 时，$a_{n+2}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a_{n+1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a_n\right)$

同理，设 $a_2-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a_1=\mu$，可得 $a_{n+1}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a_n=\mu\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ (2),

由(1)(2)联立解得：$a_n=\dfrac{\lambda}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{\mu}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

易知，$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}>1$，$-1<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$，

$$|a_n|=\left|\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}-\frac{\mu}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right|\geq\left|\frac{\lambda}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}\right|-\left|\frac{\mu}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right|,$$

当 n 趋向于正无穷时，$\left|\dfrac{\lambda}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1}\right|\to+\infty$，$\left|\dfrac{\mu}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right|\to 0$，此时 $|a_n|\to+\infty$，

所以不存在这样的 $M>0$，对于任意 $n\in\mathrm{N}^*$，总有 $|a_n|<M$，故只能 $a_n=0$. ④正确.

故答案为：①③④

【点睛】方法点睛：求解新定义数列有关的题目，关键是理解和运用新定义的概念以及运算，利用化归和

转化的数学思想方法，将不熟悉的数学问题，转化成熟悉的问题进行求解.

数列递推关系式转化的常见形式

（1）转化为$\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}-a_{n}\right)=$常数，则数列$\{a_{n+1}-a_{n}\}$是等差数列.

（2）转化为$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n}}=$常数，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_{n}}\right\}$是等差数列.

（3）转化为$\dfrac{1}{a_{n+1}+c}-\dfrac{1}{a_{n}+c}=$常数，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_{n}+c}\right\}$是等差数列.

（4）转化为$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_{n}}=$常数，则数列$\left\{\sqrt{a_{n}}\right\}$是等差数列.

（5）转化为$a_{n+1}^{2}-a_{n}^{2}=$常数，则数列$\left\{a_{n}^{2}\right\}$是等差数列.

（6）转化为$\log_{b}a_{n+1}-\log_{b}a_{n}=$常数，则数列$\{\log_{b}a_{n}\}$是等差数列.

三、解答题（共85分）

16. 【答案】（1）$\left\{x\middle|x=k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in Z\right\}$；（2）$\dfrac{5\pi}{6}$.

【分析】

（1）根据三角恒等变换化简函数$f(x)$，根据三角函数图像和性质令$f(x)=2$，求出x的取值集合；

（2）求出函数$f(x)$单调减区间，当$k=1$时$f(x)$的减区间为$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，并且$\dfrac{\pi}{2}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，所以

$\dfrac{\pi}{2}<m\leq\dfrac{5\pi}{6}$即可求得实数$m$的最大值.

【详解】（1）由题意，得$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$，

当$f(x)$取最大值时，即$\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=1$，此时$2x-\dfrac{\pi}{6}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$

所以x的取值集合为$\left\{x\middle|x=k\pi+\dfrac{\pi}{3},k\in Z\right\}$.

（2）由$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$得

$\dfrac{4\pi}{6}+2k\pi\leq 2x\leq\dfrac{10\pi}{6}+2k\pi$，$\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leq x\leq\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$

所以$f(x)$的减区间$\left[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\right],k\in Z$，

当$k=1$，得$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$是一个减区间，且$\dfrac{\pi}{2}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$

所以$\left[\frac{\pi}{2},m\right]\subset\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，

所以$m\in(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}]$，

所以m的最大值为$\frac{5\pi}{6}$.

【点睛】思路点睛：三角恒等变换综合应用的解题思路：

（1）利用降幂、升幂公式将$f(x)$化为$a\sin x+b\cos x$的形式；

（2）构造$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x)$；

（3）和差公式逆用，得$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$（其中$\varphi$为辅助角，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$）；

（4）利用$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$研究三角函数的性质；

（5）反思回顾，查看关键点、易错点和答题规范.

17.【答案】（1）$a_n=2n-1$；

（2）5.

【分析】（1）利用等比数列的性质列方程求公差，即可写出$\{a_n\}$的通项公式；

（2）由题设确定$\{b_n\}$的通项公式，应用等比数列前n项和公式求出数列$\left\{\frac{2}{b_n}\right\}$的前$n$项和，结合$T_n<\frac{299}{300}$求$n$的范围.

【小问1详解】

由题设$(a_3-1)^2=2a_1(a_4+1)\Rightarrow a_3^2-2a_3+1=2a_4+2$，若公差为$d>0$，

所以$(1+2d)^2-2(1+2d)+1=2(1+3d)+2$，即$2d^2-3d-2=(2d+1)(d-2)=0$，

所以$d=2$，故$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

【小问2详解】

由（1）知：$b_1=a_2=3,b_2=a_5=9$，故数列$\{b_n\}$的首项、公比为3，

所以$\frac{2}{b_n}=\frac{2}{3^n}$，则$T_n=2\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n})=\frac{2}{3}\times\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{3^n}<\frac{299}{300}$，

所以$\frac{1}{3^n}>\frac{1}{300}\Rightarrow 3^n<300$且$n\in\mathrm{N}^*$，而$3^5=243<300<3^6=729$，

所以$n\le 5$，故最大正整数n为5.

18.【答案】（1）-1；

（2）答案见解析；　（3）$b<2$

【分析】（1）由 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}$，应用换元法有 $t=x-1\in\left(-\infty,0\right)$，再由二次函数性质求最小值；

（2）对函数求导，并分类讨论参数，根据导数的符号判断区间单调性即可；

（3）结合（2）的单调性，研究 $f\left(x\right)$ 的区间符号及极值情况判断不同 b 的区间是否存在最小值，即得答案.

【小问 1 详解】

由题设 $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-1}$，

当 $x\in\left(-\infty,1\right)$，令 $t=x-1\in\left(-\infty,0\right)$，故 $\dfrac{1}{t}\in\left(-\infty,0\right)$，

则 $f\left(x\right)=g(t)=\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{t}=(\dfrac{1}{t}+1)^2-1$，即 $\dfrac{1}{t}=-1$ 时 $f\left(x\right)_{\min}=g(t)_{\min}=-1$.

【小问 2 详解】

由 $f'\left(x\right)=\dfrac{2(x-1)^2-(2x-b)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{-2[x-(b-1)]}{(x-1)^3}$，

又定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，令 $f'\left(x\right)=0\Rightarrow x=b-1$，

当 $b-1<1\Rightarrow b<2$ 时，$(-\infty,b-1),(1,+\infty)$ 上 $f'\left(x\right)<0$，$(b-1,1)$ 上 $f'\left(x\right)>0$，

此时 $f\left(x\right)$ 的递减区间为 $(-\infty,b-1),(1,+\infty)$，递增区间为 $(b-1,1)$；

当 $b-1=1\Rightarrow b=2$ 时，$(-\infty,1),(1,+\infty)$ 上 $f'\left(x\right)<0$，

此时 $f\left(x\right)$ 的递减区间为 $(-\infty,1),(1,+\infty)$，无递增区间；

当 $b-1>1\Rightarrow b>2$ 时，$(-\infty,1),(b-1,+\infty)$ 上 $f'\left(x\right)<0$，$(1,b-1)$ 上 $f'\left(x\right)>0$，

此时 $f\left(x\right)$ 的递减区间为 $(-\infty,1),(b-1,+\infty)$，递增区间为 $(1,b-1)$；

【小问 3 详解】

当 $b<2$ 时，在 $(1,+\infty)$ 上 $f\left(x\right)>0$，且 $f\left(b-1\right)=\dfrac{1}{b-2}<0$，

由（2），$f\left(x\right)$ 在 $(-\infty,b-1)$ 上递减，$(b-1,1)$ 上递增，故 $f\left(b-1\right)$ 为极小值，

此时，$f\left(x\right)$ 有最小值；

当 $b=2$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{2}{x-1}$ 在 $(-\infty,1)$ 上递减且 $f\left(x\right)<0$，$(1,+\infty)$ 上递增且 $f\left(x\right)>0$，

此时，$f\left(x\right)$ 没有最小值；

当 $b>2$ 时，在 $(-\infty,1)$ 上递减且 $f\left(x\right)<0$，且 $f\left(b-1\right)=\dfrac{1}{b-2}>0$，

由（2），$f\left(x\right)$ 在 $(b-1,+\infty)$ 上递减，$(1,b-1)$ 上递增，故 $f\left(b-1\right)$ 为极大值，

此时，$f\left(x\right)$没有最小值；

综上，$b<2$时$f\left(x\right)$有最小值.

19.【答案】（1）$\frac{\pi}{6}$；

（2）选②，$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

【分析】（1）由正弦定理可得$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$，从而$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，进而可求解；

（2）选①：由正弦定理得$\frac{2}{\sin C}=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{6}}$，求得$\sin C=\frac{1}{a}$，从而确定三角形不存在；选②：由余弦定理求得$a=\sqrt{2}$，再利用等面积法可求解；选③：由正弦定理可求得$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，进而求得$C=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，不满足题意.

【小问1详解】

因为$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，

所以由正弦定理可得$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$，

又$\sin C\neq 0$，所以$\sqrt{3}\sin A=\cos A$，即$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{6}$.

【小问2详解】

若选条件①：$\sin C=\frac{2}{a}$，由正弦定理知$\frac{2}{\sin C}=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{6}}=2a$,可得$\sin C=\frac{1}{a}$，

故满足所选条件的三角形不存在，不满足题意；

若选条件②：$b=1+\sqrt{3}$，

由余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(1+\sqrt{3})^2+2^2-2(1+\sqrt{3})\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$，

即$a=\sqrt{2}$，所以满足条件的三角形唯一.

设BC边上的高为h，由等面积法可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$，

即$2\times(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}h$，解得$h=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，

故 BC 边上高线的长为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

若选条件③：$a=\sqrt{2}$，由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sin C}$，

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $C=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$，有两解，不符合题意.

综上，应该选②，BC 边上高线的长为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

20.【答案】(1) $a=-1,b=-1$

(2) 证明见解析　(3) 1 个

【分析】(1) 求导，利用 $f'(0)=a+1=0$ 且 $f(0)=1+b=0$ 即可求解，

(2) 求导，由导数即可得函数的单调性，

(3) 求导，根据到导函数的单调性，结合极值点的定义即可求解.

【小问 1 详解】

$f'(x)=ae^{ax}+x^2-x+1$，

由题意可知 $x=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程，

所以 $f'(0)=a+1=0$ 且 $f(0)=1+b=0$，故 $a=-1,b=-1$

【小问 2 详解】

由（1）知 $a=-1,b=-1$，所以 $g(x)=f'(x)=-e^{-x}+x^2-x+1$，

所以 $g'(x)=e^{-x}+2x-1$，

令 $h(x)=g'(x)=e^{-x}+2x-1,h'(x)=-e^{-x}+2$，

当 $x>-\ln 2,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，当 $x<-\ln 2,h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，

因此 $h(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，故 $g'(x)>g'(0)=0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

【小问 3 详解】

由（2）知: 当 $x>-\ln 2,g'(x)$ 单调递增，当 $x<-\ln 2,g'(x)$ 单调递减，

所以当 $x=-\ln 2$ 时，$g'(x)$ 取最小值，且 $g'(0)=0$，$g'(-2)=e^2-5>0,g'(-1)=e-3<0,$ 故存在

$x_0\in(-2,-1)$，使得 $g'(x_0)=0,$

因此当 $x>0$ 和 $x<x_0,g'(x)>0,$ 当 $x_0<x<0,g'(x)<0,$

因此 $f'(x)=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,0)$ 时单调递减，

由于 $f'(-3)=-e^3+9+3+1=13-e^3<13-2.7^3<0$， $f'(0)=0$，

因此存在 $x_0'\in(-3,0)$ 使得 $f'(x_0')=0$，

故当 $x<x_0'$ 时， $f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减，当 $x_0'<x$ 时， $f'(x)\geq 0$， $f(x)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 在 $x=x_0'$ 时取极小值，

故 $f(x)$ 有 1 个极值点.

21.【答案】(1) $-2,0,2,8$

(2) 证明见详解 (3) 1011

【分析】(1) 根据递推关系，利用分类讨论思想计算即可；

(2) 利用反证法，设 i 是使得 $a_i>a_1$ 的最小正整数，利用第二归纳法可得 a_1 是 a_i 的倍数，与假设矛盾；

(3) 结合条件分类讨论可判定结果.

【小问 1 详解】

若 $a_2>a_1$，则由 $|a_2-a_1|=\max\{a_1\}\Rightarrow a_2-a_1=a_1\Rightarrow a_2=4$，

若 $a_2\leq a_1$，则由 $|a_2-a_1|=\max\{a_1\}\Rightarrow a_1-a_2=a_1\Rightarrow a_2=0$，

当 $a_2=4$ 时，若 $a_3>a_2$，则由 $|a_3-a_2|=\max\{a_1,a_2\}\Rightarrow a_3-a_2=a_2\Rightarrow a_3=8$，

若 $a_3\leqslant a_2$，则由 $|a_3-a_2|=\max\{a_1,a_2\}\Rightarrow a_2-a_3=a_2\Rightarrow a_3=0$，

当 $a_2=0$ 时，若 $a_3>a_2$，则由 $|a_3-a_2|=\max\{a_1,a_2\}\Rightarrow a_3-a_2=a_1\Rightarrow a_3=2$，

若 $a_3\leqslant a_2$，则由 $|a_3-a_2|=\max\{a_1,a_2\}\Rightarrow a_2-a_3=a_1\Rightarrow a_3=-2$，

综上 a_3 的所有可能取值为 $-2,0,2,8$；

【小问 2 详解】

假设 a_1 不是数列各项中的最大项，设 i 是使得 $a_i>a_1$ 的最小正整数，则由题意可知

$|a_{i+1}-a_i|=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}=a_i$，所以 a_{i+1} 是 a_i 的倍数，

假设 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k-1}$ 都是 a_i 的倍数，则

$|a_{i+k}-a_{i+k-1}|=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-1}\}=\max\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k-1}\}$，

所以 a_{i+k} 也是 a_i 的倍数，

由第二数学归纳法可知，对任意 $n\geq i$， a_n 都是 a_i 的倍数，

又存在正整数 T，对 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，有 $a_{n+T}=a_n$，

所以存在正整数 $t\geq i$， $a_t=a_1$，

因而 a_1 是 a_i 的倍数，但 $a_i>a_1$，矛盾，所以 a_1 是数列各项中的最大项；

【小问 3 详解】

显然 $m=1$ 成立，

当 $m=2$ 时，$|a_2-a_1|=\max\{a_1\}\Rightarrow 0=a_1$，与已知矛盾，不符合题意，

当 $m>2$ 时，$|a_m-a_{m-1}|=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}\}\Rightarrow|a_1-a_{m-1}|=a_1$

$\Rightarrow a_{m-1}=0$ 或 $a_{m-1}=2a_1$，

又 $a_1\in\mathrm{R}^+$，即 $2a_1>a_1\Rightarrow a_{m-1}>a_1$，与前提矛盾，舍去，故 $a_{m-1}=0$，

又 $|a_m-a_{m-1}|=a_1>0$，即连续的两项不能相等，

故 $a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2021},a_2=a_4=a_6=\cdots=a_{2022}=0$

所以 $m=1,3,5,\cdots,2021$，共 1011 个数.

【点睛】难点在于第二问利用反证法及第二数学归纳法证明问题，反证法适用范围：（1）否定性命题；（2）结论涉及“至多”、“至少”、“无限”、“唯一”等词语的命题；（3）命题成立非常明显，直接证明所用的理论较少，且不容易证明，而其逆否命题非常容易证明；（4）要讨论的情况很复杂，而反面情况较少.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！