

# 高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为  $A = \{x | x > 2\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 5\}$ , 所以  $A \cap B = \{x | 2 < x < 5\}$ .

2. B 【解析】本题考查复数的有关概念,考查数学运算的核心素养.

因为  $\frac{a+i}{2-4i} = \frac{(a+i)(2+4i)}{20} = \frac{2a-4+(4a+2)i}{20}$ , 所以  $2a-4=0$ , 所以  $a=2$ .

3. C 【解析】本题考查解三角形的知识,考查数学运算的核心素养.

因为  $A+B = \frac{5\pi}{6}$ , 所以  $C = \frac{\pi}{6}$ , 由  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ , 得  $\frac{3}{\sin A} = 4$ , 所以  $\sin A = \frac{3}{4}$ .

4. A 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

$f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ , 因为  $f(-x) = (-x + \frac{1}{x})\sin(-x) = (x - \frac{1}{x})\sin x = f(x)$ , 所以

$f(x)$  为偶函数, 排除 B, D. 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) < 0$ , 故选 A.

5. D 【解析】本题考查直线与圆的位置关系,考查数学运算与直观想象的核心素养.

因为圆 O 与圆 C 外切, 所以  $r^2 = 4$ . 设圆心  $C(3, 0)$  到直线  $l$  的距离为  $d$ , 则  $d = \frac{|3-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ,

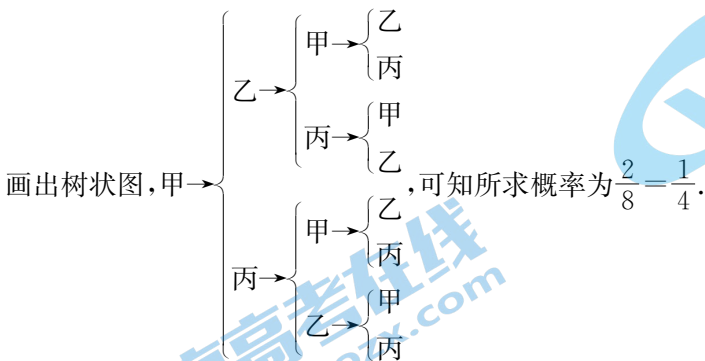
从而  $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$ .

6. B 【解析】本题考查圆锥的侧面积与体积,考查直观想象与数学运算的核心素养.

设该圆锥的底面半径与母线长分别为  $r, l$ , 由  $\frac{\pi r^2}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ , 得  $r = 1$ , 所以  $l =$

$\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$ , 从而该圆锥的侧面积  $S = \pi rl = 3\pi$ .

7. C 【解析】本题考查古典概型,考查数学运算的核心素养.



8. B 【解析】本题考查双曲线的性质,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由已知得  $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = \frac{5}{3}$ , 因为  $PQ$  平分  $\angle F_1PF_2$ , 所以  $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = \frac{5}{3}$ , 所以  $\frac{\frac{b^2}{a} + 2a}{\frac{b^2}{a}} = \frac{5}{3}$ , 整

理得  $b^2 = 3a^2$ , 由  $c^2 - a^2 = 3a^2$ , 得  $c^2 = 4a^2$ , 所以  $e = \frac{c}{a} = 2$ .

9. AC 【解析】本题考查三角恒等变换和基本不等式,考查数学运算的核心素养.

对于 A,  $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{7}{9}$ , A 正确;

对于 B, 因为  $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3}$ , 所以  $\tan\theta = \frac{1}{2}$  或  $\tan\theta = -2$ , B 错误;

令  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ , 易知  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $[1, +\infty)$  上单调递增, 所以当  $x \geq \frac{1}{2}$  时,  $x + \frac{1}{x}$  的最小值为 2, 当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时,  $x + \frac{1}{x}$  的最小值为  $\frac{5}{2}$ , C 正确, D 错误.

10. BD 【解析】本题考查统计的知识,考查数据分析与数学运算的核心素养.

由雷达图可知, 400 米跑项目中, 甲的得分比乙的得分高, A 错误; 由图可知, B 正确; 甲各项得分的波动较大, 乙的各项得分均在  $(600, 800]$  内, 波动较小, C 错误; 甲的各项得分的极差约为  $1000 - 470 = 530$ , 乙的各项得分的极差小于 200, D 正确.

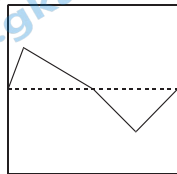
11. AC 【解析】本题考查新定义以及函数的性质,考查逻辑推理的核心素养.

对于 A, 易知函数  $f(x)$  为奇函数, 所以函数  $f(x)$  可以是中心为原点且边长为 2 的正方形的“优美函数”, 故 A 正确.

对于 B, 令  $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 得  $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ , 所以函数  $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$  图象的对称中心为  $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, 3) (k \in \mathbf{Z})$ , 故以  $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, 3) (k \in \mathbf{Z})$  为中心的正方形都能被函数  $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$  的图象平分, 即  $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$  可以同时是无数个正方形的“优美函数”, 故 B 错误.

对于 C, 令  $g(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$ , 易知函数  $g(x)$  为奇函数. 又因为函数  $f(x)$  的图象是由函数  $g(x)$  的图象向下平移一个单位长度得到的, 所以函数  $f(x)$  图象的对称中心为  $(0, -1)$ , 故以  $(0, -1)$  为中心的正方形都能被函数  $f(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) - 1$  的图象平分, 故 C 正确.

对于 D, 如图所示, 可知 D 错误.



12. ACD 【解析】本题考查不等关系,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为  $x^2 = y^3 < 1$ , 所以  $y = x^{\frac{2}{3}} < 1$ , 所以  $0 < x < y < 1$ , A 正确, B 错误;

令  $g(x) = |y - x| = y - x = x^{\frac{2}{3}} - x$ , 则  $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1$ , 当  $0 < x < \frac{8}{27}$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增, 当  $x > \frac{8}{27}$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减, 所以  $g(x)_{\max} = g(\frac{8}{27}) = \frac{4}{27}$ , C 正确;

令  $h(x) = |y^2 - x^2| = y^2 - x^2 = x^{\frac{4}{3}} - x^2$ , 则  $h'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 2x$ , 可知当  $0 < x < \frac{2\sqrt{6}}{9}$  时,  $h(x)$  单调递增, 当  $x > \frac{2\sqrt{6}}{9}$  时,  $h(x)$  单调递减, 所以  $h(x)_{\max} = h(\frac{2\sqrt{6}}{9}) = \frac{4}{27}$ , D 正确.

13. -5 【解析】本题考查平面向量的平行,考查数学运算的核心素养.

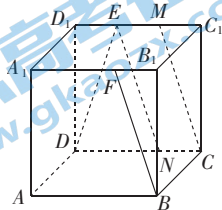
因为  $a \parallel b$ , 所以  $-5(m+2) - (5-2m) = 0$ , 解得  $m = -5$ .

14.  $\frac{4}{5}$  【解析】本题考查立体几何初步的知识, 考查直观想象的核心素养.

在棱  $CD, C_1D_1$  上分别取点  $N, M$ , 使得  $CN = \frac{1}{3}CD, C_1M = \frac{1}{3}C_1D_1$ , 连接  $CM, NE$ , 可知  $BF \parallel CM \parallel NE$ , 则  $\angle DEN$  为直线  $DE$  与  $BF$  所成的角.

设  $AB = 3$ , 在  $\triangle DEN$  中, 易得  $DE = \sqrt{10}, NE = \sqrt{10}, DN = 2$ , 设

$$\angle DEN = \theta, \text{ 则 } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{ 从而 } \cos \theta = 1 - 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$



15.  $x^2 = 2y; \frac{3}{2}$  (答案不唯一, 只要  $0 < p < 2$ , 且所求距离为  $\frac{4}{2} - \frac{p}{2}$  即可) 【解析】本题考查抛物线的定义及性质, 考查直观想象的核心素养.

易知过焦点的弦中, 通径最短, 所以  $2p < 4$ , 解得  $0 < p < 2$ . 设该弦所在的直线与  $C$  的交点分别为  $A, B$ , 则弦  $AB$  的中点到  $x$  轴的距离为  $\frac{|AB|}{2} - \frac{p}{2}$ . 取  $p = 1$ , 则抛物线  $C$  的方程为  $x^2 =$

$2y$ , 此时弦  $AB$  的中点到  $x$  轴的距离为  $\frac{3}{2}$ .

2y, 此时弦  $AB$  的中点到  $x$  轴的距离为  $\frac{3}{2}$ .

2y, 此时弦  $AB$  的中点到  $x$  轴的距离为  $\frac{3}{2}$ .

16. 8 【解析】本题考查逻辑推理, 考查数学建模的核心素养以及分类讨论的数学思想.

因为  $20 < 23$ , 所以至少要进行一次“乘以 2”的运算.

(i) 若一共只有一次“乘以 2”的运算.

设做了  $k$  次“减去 3”的运算之后, 再“乘以 2”, 再做了  $t$  次“减去 3”的运算后, 得数为  $(20 - 3k) \times 2 - 3t = 23$ , 即  $6k + 3t = 17$ , 其中  $k, t \in \mathbf{N}$ , 显然无非负整数解.

(ii) 若一共只有 2 次“乘以 2”的运算.

设做了  $k$  次“减去 3”的运算之后“乘以 2”, 再做了  $t$  次“减去 3”的运算之后“乘以 2”, 再做了  $m$  次“减去 3”的运算后, 得数是  $[(20 - 3k) \times 2 - 3t] \times 2 - 3m = 23$ , 即  $4k + 2t + m = 19, k, t, m \in \mathbf{N}$ . 当  $k = 4$  时,  $\begin{cases} t = 1, \\ m = 1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} t = 0, \\ m = 3; \end{cases}$  当  $k = 3$  时,  $t + m > \frac{2t + m}{2} = \frac{7}{2}$ ; 当  $k \leq 2$  时,  $t + m > \frac{2t + m}{2}$

$\geq \frac{11}{2}$ . 所以  $k + t + m$  的最小值为 6, 即至少运算 8 次, 过程为  $[(20 - 3 - 3 - 3 - 3) \times 2 - 3] \times 2 - 3 = 23$ .

$\geq \frac{11}{2}$ . 所以  $k + t + m$  的最小值为 6, 即至少运算 8 次, 过程为  $[(20 - 3 - 3 - 3 - 3) \times 2 - 3] \times 2 - 3 = 23$ .

$- 3 = 23$ .

(iii) 若一共有 3 次或 3 次以上“乘以 2”的运算, 总运算次数显然不止 8 次.

17. 解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 因为  $a_2 = 4, 2a_4 - a_5 = 7$ ,

所以  $2(4 + 2d) - (4 + 3d) = 7$ , 解得  $d = 3$ , 从而  $a_1 = 1$ , ..... 1 分

所以  $a_n = 3n - 2$ . ..... 3 分

设  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ , 因为  $b_4 + b_5 = 8(b_1 + b_2)$ , 所以  $\frac{b_4 + b_5}{b_1 + b_2} = q^3 = 8$ , 解得  $q = 2$ , ..... 4 分

因为  $b_3 = 4$ , 所以  $b_1 = \frac{4}{2^2} = 1$ , ..... 5 分

所以  $b_n = 2^{n-1}$ . ..... 6分

(2) 因为  $c_n = \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} + 2^{n-1}$ , 所以  $c_n = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} + 2^{n-1}$ , ..... 8分

所以  $S_n = (1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}) + (1 + 2 + \dots + 2^{n-1})$ , ..... 9分

所以  $S_n = (1 - \frac{1}{3n+1}) + \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - \frac{1}{3n+1}$ . ..... 10分

18. 解: (1) 由  $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$ , 得  $\omega = 2$ , ..... 1分

所以  $f(x) = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$ , ..... 2分

令  $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ , ..... 3分

取  $k=0$ , 得  $x = \frac{\pi}{3}$ , 取  $k=-1$ , 得  $x = -\frac{\pi}{6}$ , ..... 4分

因为  $|\frac{\pi}{6}| < |\frac{\pi}{3}|$ , 所以与  $y$  轴距离最近的对称轴方程为  $x = -\frac{\pi}{6}$ . ..... 5分

(2) 设  $f(x)$  的最小正周期为  $T$ , 因为  $f(x)$  图象相邻两个对称中心之间的距离大于  $\frac{2\pi}{7}$ , 所以

$\frac{T}{2} > \frac{2\pi}{7}$ , 即  $T > \frac{4\pi}{7}$ , 由  $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{4\pi}{7}$ , 解得  $\omega < \frac{7}{2}$ . ..... 7分

又  $\omega \in \mathbf{N}^*$  且  $\omega > 2$ , 所以  $\omega = 3, y = 2\sin(3x + \frac{\pi}{6})$ ,

所以  $f(x) = 2\sin[3(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(3x - \frac{\pi}{3})$ . ..... 9分

因为  $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{9}$ , 所以  $-\frac{5\pi}{6} \leq 3x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3}, -1 \leq \sin(3x - \frac{\pi}{3}) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ..... 11分

所以  $-2 \leq 2\sin(3x - \frac{\pi}{3}) \leq \sqrt{3}$ , 即  $f(x)$  在  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{9}]$  上的值域为  $[-2, \sqrt{3}]$ . ..... 12分

19. (1) 证明: 在等腰梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD, BC = AD = 1, AB = 2$ ,

过点  $C$  作  $CE \perp AB$  于  $E$  (图略), 则  $BE = \frac{1}{2}$ , 可知  $\angle ABC = 60^\circ$ , ..... 2分

由余弦定理知  $AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$ ,

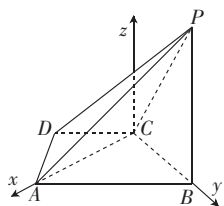
则  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , 所以  $AC \perp BC$ . ..... 4分

又  $AC \perp PC, BC \cap PC = C, BC, PC \subset$  平面  $PBC$ , 所以  $AC \perp$  平面  $PBC$ . ..... 5分

又  $AC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以平面  $ABCD \perp$  平面  $PBC$ . ..... 6分

(2) 解: 以  $C$  为坐标原点,  $\vec{CA}, \vec{CB}$  的方向分别为  $x$  轴、 $y$  轴的正方向建立空间直角坐标系.

因为  $AC \perp$  平面  $PBC, PB \perp BC$ , 所以  $A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), P(0, 1,$



$2\sqrt{3}), D(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \vec{CD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0), \vec{CP} = (0, 1, 2\sqrt{3}), \vec{PA} = (\sqrt{3}, -1, -2\sqrt{3})$ . ..... 8分

设平面  $PCD$  的法向量为  $n = (x, y, z)$ ,

则  $\begin{cases} \vec{CD} \cdot n = \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{2}y = 0, \\ \vec{CP} \cdot n = y + 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$  取  $n = (1, \sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ . ..... 10分

设直线  $PA$  与平面  $PCD$  所成的角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = |\cos \langle \vec{PA}, n \rangle| = \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3}|}{4 \times \frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{51}}{34}$ ,

即直线  $PA$  与平面  $PCD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{51}}{34}$ . ..... 12分

20. 解: (1)  $\mu = 35 \times 0.025 + 45 \times 0.15 + 55 \times 0.2 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.225 + 85 \times 0.1 + 95 \times 0.05 = 65$ , ..... 2分

$\sigma^2 = (35 - 65)^2 \times 0.025 + (45 - 65)^2 \times 0.15 + (55 - 65)^2 \times 0.2 + 0 + (75 - 65)^2 \times 0.225 + (85 - 65)^2 \times 0.1 + (95 - 65)^2 \times 0.05 = 210$ , ..... 3分

所以  $\sigma \approx 14.5, X \sim N(65, 14.5^2)$ ,

所以  $P(50.5 < X \leq 94) = P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = \frac{0.9545}{2} + \frac{0.6827}{2} = 0.8186$ . ..... 4分

(2)  $\xi$  的可能取值为 10, 20, 30, 40,

$P(X \leq 55) = \frac{3}{8}, P(X > 55) = \frac{5}{8}$ , ..... 5分

$P(\xi = 10) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$ ,

$P(\xi = 20) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{57}{128}$ , ..... 7分

$P(\xi = 30) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 2 = \frac{15}{64}$ ,

$P(\xi = 40) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{128}$ , ..... 9分

所以  $\xi$  的分布列为

$\xi$	10	20	30	40
$P$	$\frac{9}{32}$	$\frac{57}{128}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{128}$

..... 10分

$E(\xi) = 10 \times \frac{9}{32} + 20 \times \frac{57}{128} + 30 \times \frac{15}{64} + 40 \times \frac{5}{128} = \frac{325}{16}$ , ..... 11分

故此次抽奖要准备的学习用品的价值总额约为  $320 \times \frac{325}{16} = 6500$  元. .... 12分

21. 解:(1)由  $e^2 = \frac{2}{3} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ , 得  $a^2 = 3b^2$ , ..... 1分

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ..... 2分

把点  $(\sqrt{3}, 1)$  的坐标代入上式, 得  $\frac{3}{3b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ , 可得  $b^2 = 2$ , ..... 3分

所以  $a^2 = 6, c = 2$ , 故椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ . ..... 4分

(2)由(1)知焦点  $F$  的坐标为  $(2, 0)$ , 若直线  $l$  的斜率为 0, 则  $O, A, B$  三点不能构成三角形, 所以直线  $l$  的斜率不为 0, 设直线  $l$  的方程为  $x = my + 2$ ,

联立方程组  $\begin{cases} x = my + 2, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$  消去  $x$ , 得  $(m^2 + 3)y^2 + 4my - 2 = 0$ , ..... 5分

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = -\frac{2}{m^2 + 3}$ , ..... 6分

$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(-\frac{4m}{m^2 + 3}\right)^2 + 4 \times \frac{2}{m^2 + 3}}$   
 $= \frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 3}$ . ..... 8分

令  $\sqrt{m^2 + 1} = t (t \geq 1)$ , 则  $S_{\triangle OAB} = \frac{2\sqrt{6}t}{t^2 + 2} = \frac{2\sqrt{6}}{t + \frac{2}{t}} \leq \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ , 当且仅当  $t = \sqrt{2}$  时, 等号成立, 即

$\triangle OAB$  面积的最大值为  $\sqrt{3}$ . ..... 10分

令  $\sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{2}$ , 解得  $m = \pm 1$ , 所以此时直线  $l$  的方程为  $x - y - 2 = 0$  或  $x + y - 2 = 0$ . ...  
..... 12分

22. (1)证明: 令  $h(x) = f'(x) = e^x - \sin x - \cos x$ , 则  $h'(x) = e^x - \cos x + \sin x$ . ..... 1分

当  $0 \leq x < \pi$  时,  $h'(x) = e^x - \cos x + \sin x \geq 1 - \cos x + \sin x \geq 0$ , ..... 2分

当  $x \geq \pi$  时,  $h'(x) = e^x - \cos x + \sin x \geq e^x - \cos x + \sin x > 1 - \cos x + 1 + \sin x \geq 0$ , ..... 3分

即当  $x \geq 0$  时,  $h'(x) \geq 0$ , 所以  $h(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 则  $f'(x) = h(x) \geq h(0) = 0$ , 故当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) \geq 0$  成立. .... 4分

(2)解:  $g(x) = 0$ , 即  $e^{2x - \frac{\pi}{2}} [f(x) + f(2x) - e^{2x}] - 1 = 0$ ,  
所以  $f(x) = e^{\frac{\pi}{2} - 2x} - f(2x) + e^{2x} = e^{\frac{\pi}{2} - 2x} + \sin 2x - \cos 2x$   
 $= e^{\frac{\pi}{2} - 2x} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ . ..... 5分

设  $t(x) = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ , 由(1)可知当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) \geq 0$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 从而  $f(x) \geq f(0) = 2$ .

下面证明: 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = e^x + \cos x - \sin x \leq 2$ , 即证  $\frac{2 + \sin x - \cos x}{e^x} \geq 1$ .

设  $\varphi(x) = \frac{2 + \sin x - \cos x}{e^x}$ , 则  $\varphi'(x) = \frac{2\cos x - 2}{e^x} \leq 0$ ,

所以  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递减, 从而  $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 1$ , 即当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = e^x + \cos x - \sin x \leq 2$ . ..... 6 分

当  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $x = \frac{\pi}{2} - 2x, t(x) = f(x) - f(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$ , 所以  $\frac{\pi}{6}$  是  $g(x)$  的零点; ..... 7 分

当  $0 < x < \frac{\pi}{6}$  时,  $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} - 2x < \frac{\pi}{2}, f(x) < f(\frac{\pi}{2} - 2x)$ , 即  $t(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{6})$  上无零点; ..... 8 分

当  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $0 < \frac{\pi}{2} - 2x < \frac{\pi}{6}, f(x) > f(\frac{\pi}{2} - 2x)$ , 即  $t(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$  上无零点; ..... 9 分

当  $x \geq \frac{\pi}{4}$  时,  $\frac{\pi}{2} - 2x \leq 0$ , 所以  $f(x) > 2, f(\frac{\pi}{2} - 2x) \leq 2$ , 即  $t(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $[\frac{\pi}{4}, +\infty)$  上无零点; ..... 10 分

当  $x \leq 0$  时,  $\frac{\pi}{2} - 2x \geq \frac{\pi}{2}$ , 所以  $f(\frac{\pi}{2} - 2x) \geq f(\frac{\pi}{2}) > f(0) = 2 \geq e^x + \cos x - \sin x = f(x)$ , 即  $t(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上无零点. .... 11 分

综上,  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上只有 1 个零点. .... 12 分

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯