

高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $(z-i)(1-i)=2$ ，则 $|z| =$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ ， $B = \{y | y = 1 - x^2\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $[-1, 1]$ B. $[-1, 1)$ C. $[-3, 1]$ D. $[-3, 1)$

3. 已知 $a, b \in \mathbf{R}$ ， $p: a < b$ ， $q: a^2 > b(2a - b)$ ，则 p 是 q 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知直线 l 与直线 $x + 2y + 1 = 0$ 垂直，若直线 l 的倾斜角为 θ ，则 $\sin \theta \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) =$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{2}{5}$

5. 水雾喷头布置的基本原则是：保护对象的水雾喷头数量应根据设计喷雾强度、保护面积和水雾喷头特性，按水雾喷头流量 q (单位: L/min) 计算公式为 $q = K \sqrt{10P}$ 和保护对象的水雾喷头数量 N 计算公式为 $N = \frac{S \cdot W}{q}$ 计算确定，其中 P 为水雾喷头的工作压力 (单位: MPa)， K 为水雾喷头的流量系数 (其值由喷头制造商提供)， S 为保护对象的保护面积， W 为保护对象的设计喷雾强度 (单位: L/min · m²)。水雾喷头的布置应使水雾直接喷射和完全覆盖保护对象，如不能满足要求时应增加水雾喷头的数量。当水雾喷头的工作压力 P 为 0.35 MPa，水雾喷头的流量系数 K 为 24.96，保护对象的保护面积 S 为 14 m²，保护对象的设计喷雾强度 W 为 20 L/min · m² 时，保护对象的水雾喷头的数量 N 约为 (参考数据: $\sqrt{3.5} \approx 1.87$)

- A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

6. 在 $(2x - y + z)^7$ 的展开式中， $x^3 y^2 z^2$ 项的系数为

- A. 1 680 B. 210 C. -210 D. -1 680

7. 在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 9$ ， $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 10$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值为

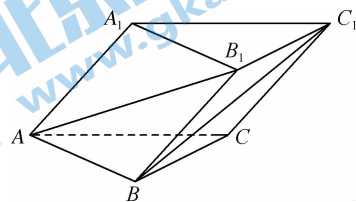
- A. 64 B. 53 C. 42 D. 25

8. 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$, 圆 $C: x^2 + (y-3)^2 = 1$, P 为 E 上一点, Q 为 C 上一点, 则 $|PQ|$ 的最小值为

- A. 2
B. $2\sqrt{2} - 1$
C. $2\sqrt{2}$
D. 3

9. 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面边长和侧棱长均相等, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



10. 设 $a = \frac{2}{\ln 2}$, $b = \frac{e^2}{4 - \ln 4}$, $c = 2\sqrt{e}$, 则

- A. $a > b > c$
B. $c > b > a$
C. $a > c > b$
D. $c > a > b$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x + 1}$, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到 $g(x)$ 的图象, 则

- A. π 为 $f(x)$ 的一个周期
B. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$
C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 0$ 对称
D. 曲线 $y = g(x)$ 在点 $(0, g(0))$ 处的切线斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知 A, B 分别为双曲线 $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$ 的左、右顶点, P 为该曲线上不同于 A, B 的任意一点, 设 $\angle PAB = \alpha$, $\angle PBA = \beta$, $\triangle PAB$ 的面积为 S , 则

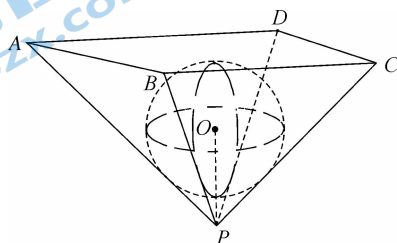
- A. $\tan \alpha + \tan \beta$ 为定值
B. $\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2}$ 为定值
C. $S \cdot \tan(\alpha + \beta)$ 为定值
D. $\frac{S}{\tan(\alpha + \beta)}$ 为定值

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知平面向量 a, b 满足 $|a| = \sqrt{10}$, $|b| = 2$, 且 $(2a + b) \cdot (a - b) = 14$, 则 $|a + b| =$ _____.

14. 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $E: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 写出圆 C 和圆 E 的一条公切线的方程 _____.

15. 如图, 在正四棱锥 $P - ABCD$ 框架内放一个球 O , 球 O 与侧棱 PA, PB, PC, PD 均相切. 若 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 且 $OP = 2$, 则球 O 的表面积为 _____.



16. 若 $f(x) = \sin x - 2x + a$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内存在唯一的零点 x_1 , $g(x) = ax - x^2 - \cos x + a$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内存在唯一的零点 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则实数 a 的取值范围为 _____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。全站免费,资源共享,更多资料关注公众号拾穗者的杂货铺。

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,若 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{b + c}$.

- (1)求 A ;
- (2)已知 D 为边 BC 上一点, $\angle DAB = \angle DAC$,若 $AD = \sqrt{3}, a = 3\sqrt{2}$,求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

无论是国际形势还是国内消费状况,2023 年都是充满挑战的一年,为应对复杂的经济形势,各地均出台了促进经济发展的各项政策,积极应对当前的经济形势,取得了较好的效果. 某市零售行业为促进消费,开展了新一轮的让利促销的活动,活动之初,利用各种媒体进行大量的广告宣传. 为了解传媒对本次促销活动的影响,在本市内随机抽取了 6 个大型零售卖场,得到其宣传费用 x (单位:万元)和销售额 y (单位:万元)的数据如下:

卖场	1	2	3	4	5	6
宣传费用	2	3	5	6	8	12
销售额	30	34	40	45	50	60

- (1)求 y 关于 x 的线性回归方程,并预测当宣传费用至少多少万元时(结果取整数),销售额能突破 100 万元;
- (2)经济活动中,人们往往关注投入和产出比,在这次促销活动中,设销售额与投入的宣传费用的比为 λ ,若 $\lambda > 10$,称这次宣传策划是高效的;否则为非高效的. 从这 6 家卖场中随机抽取 3 家.
 - ①若抽取的 3 家中含有宣传策划高效的卖场,求抽取的 3 家中恰有一家宣传策划高效的概率;
 - ②若抽取的 3 家卖场中宣传策划高效的有 X 家,求 X 的分布列和数学期望.

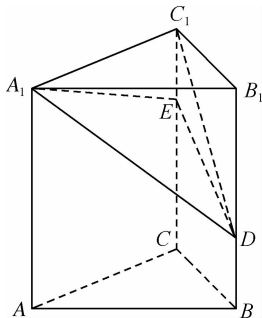
附:参考数据 $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 1752$, 回归直线方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$ 的最小二乘法的估计公式分别为: $\hat{b} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

19. (本小题满分 12 分)

在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E 为棱 CC_1 上一点, $AB = CE = 2, AA_1 = 3, D$ 为棱 BB_1 上一点.

- (1)若 $CA = CB$,且 D 为 BB_1 靠近 B 的三等分点,求证:平面 $A_1DE \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;
- (2)若 $\triangle ABC$ 为等边三角形,且三棱锥 $D - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,求二面角 $E - A_1D - C_1$ 的正弦值的大小.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y = k_1 x (k_1 \neq 0)$ 与 E 交于 A, B 两点, 当 l 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线时, A 到 y 轴的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 若过 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 H , OH 的中点为 N (O 为坐标原点), 连接 AN 并延长交 E 于点 P , 直线 PB 的斜率为 k_2 , 求 $|k_1 - k_2|$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{a}{x} (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $g(x) = \frac{x}{2} f(x) - ax^2 - x$ 有两个不同的极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明: $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 3$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以 O 为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$.

(1) 求 C 的直角坐标方程以及 C 与 y 轴交点的极坐标;

(2) 若直线 l 与 C 交于点 A, B , 与 x 轴交于点 P , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

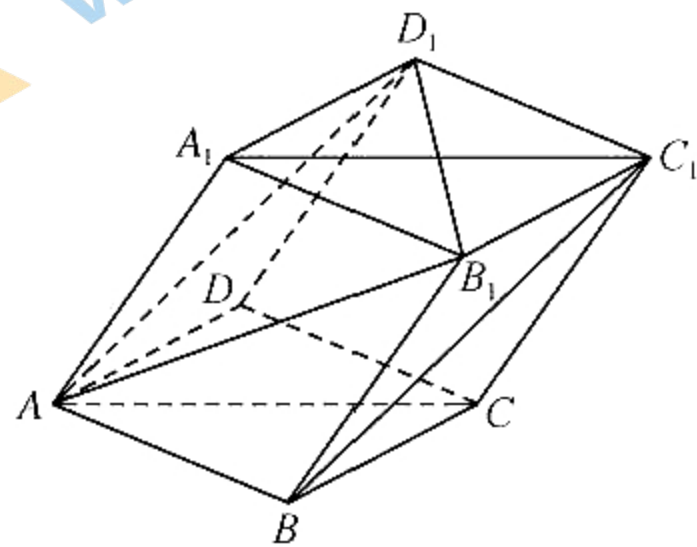
已知关于 x 的不等式 $|x^2 + ax + b| \leq 2|x - 4| \cdot |x + 2|$ 对任意实数 x 恒成立.

(1) 求满足条件的实数 a, b 的所有值;

(2) 若 $x^2 + ax + b \geq (m + 2)x - m - 15$ 对 $x > 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

高三理科数学综合参考答案、提示及评分细则

1. D 由 $(z-i)(1-i)=2$, 得 $z=\frac{2}{1-i}+i=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+i=1+i+i=1+2i$, 所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, 故选 D.
2. C 由 $x^2+2x-3\leq 0$, 得 $-3\leq x\leq 1$, 所以 $A=[-3, 1]$; 因为函数 $y=1-x^2$ 的值域为 $(-\infty, 1]$, 所以 $B=(-\infty, 1]$, 所以 $A\cap B=[-3, 1]$, 故选 C.
3. A 当 $a<b$ 时, $a^2-b(2a-b)=(a-b)^2>0$, 即 $a^2>b(2a-b)$, 所以 p 是 q 的充分条件; 由 $a^2>b(2a-b)$ 推不出 $a<b$, 所以 p 不是 q 的必要条件, 故 p 是 q 的充分不必要条件, 故选 A.
4. D 由题意知直线 l 的斜率为 2, 所以 $\tan \theta=2$, 所以 $\sin \theta \sin \left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sin \theta \cos \theta=-\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta+\cos^2 \theta}=-\frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta+1}=-\frac{2}{5}$, 故选 D.
5. C 由题意知, 保护对象的水雾喷头的数量约为 $N=\frac{SW}{q}=\frac{SW}{K \sqrt{10P}}=\frac{14 \times 20}{24.96 \times \sqrt{10 \times 0.35}} \approx \frac{280}{24.96 \times 1.87} \approx 5.9989 \approx 6$, 故选 C.
6. A 相当于在 7 个因式中有 3 个因式选 $2x$, 有 C_7^3 种选法, 余下的 4 个因式中有 2 个因式选 $-y$, 有 C_4^2 种选法, 最后余下 2 个因式中选 z , 把所选式子相乘即可得 $x^3 y^2 z^2$ 项, 而 $C_7^3(2x)^3 \cdot C_4^2(-y)^2 C_2^2 z^2=1680 x^3 y^2 z^2$, 所以 $x^3 y^2 z^2$ 的系数为 1680, 故选 A.
7. B 法一: 由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-10$, 得 $a_{n+2}-a_{n+1}-10=2(a_{n+1}-a_n-10)$, 所以数列 $\{a_{n+1}-a_n-10\}$ 是首项是 -2, 公比是 2 的等比数列, 所以 $a_{n+1}-a_n-10=-2^n$, 所以 $a_{n+1}-a_n=10-2^n$, 所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为 8, 6, 2, -6, -22, ..., 从第 4 项起为负数, 故 $\{a_n\}$ 从第 4 项起单调递减, 可知 $a_1=1, a_2=9, a_3=15, a_4=17, a_5=11, a_6=-11$, 所以 $(S_n)_{\max}=S_5=53$, 故选 B.
- 法二: 由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-10$, 得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-10$, 令 $a_{n+1}-a_n=b_n$, 所以 $b_{n+1}=2b_n-10$, 则 $b_{n+1}-10=2(b_n-10)$, 所以数列 $\{b_n-10\}$ 是以 -2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $b_n-10=-2 \times 2^{n-1}=-2^n$, 即 $b_n=-2^n+10$, 即 $a_{n+1}-a_n=10-2^n$, 由 $a_2-a_1=10-2^1, a_3-a_2=10-2^2, a_4-a_3=10-2^3, \dots, a_n-a_{n-1}=10-2^{n-1} (n \geq 2)$, 将以上 $n-1$ 个等式两边相加得 $a_n-a_1=10(n-1)-\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=10n-2^n-8$, 所以 $a_n=10n-2^n-7$, 当 $n \leq 3$ 时, $a_{n+1}-a_n > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 当 $n \geq 4$ 时, $a_{n+1}-a_n < 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递减, 因为 $a_5=10 \times 5-2^5-7=11 > 0, a_6=10 \times 6-2^6-7=-11 < 0$, 所以 $(S_n)_{\max}=S_5=1+9+15+17+11=53$, 故选 B.
8. B 由题意知 $C(0, 3)$, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2=4y_0, |PC|=\sqrt{x_0^2+(y_0-3)^2}=\sqrt{y_0^2-2y_0+9}=\sqrt{(y_0-1)^2+8}$, 所以当 $y_0=1$ 时, $|PC|_{\min}=2\sqrt{2}$, 所以 $|PQ|_{\min}=2\sqrt{2}-1$, 故选 B.
9. A 将三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成一个四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 则 $\angle B_1AD_1$ 即为所求的角或其补角. 设三棱柱底面边长和侧棱长均为 1, 在 $\triangle AB_1D_1$ 中, $AB_1=\sqrt{3}, B_1D_1=\sqrt{3}, AD_1=\sqrt{2}$, $\cos \angle B_1AD_1=\frac{AB_1^2+AD_1^2-B_1D_1^2}{2AB_1 \cdot AD_1}=\frac{3+2-3}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, 故选 A.
10. D 设 $f(x)=\frac{x}{\ln x} (x>1), f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$, 令 $f'(x)<0$, 得 $1<x<e$, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>e$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减; 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 又 $a=f(2)=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}=f(4), b=\frac{e^2}{4-\ln 4}=\frac{\frac{e^2}{2}}{\ln \frac{e^2}{2}}=f\left(\frac{e^2}{2}\right), c=2\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{\ln \sqrt{e}}=f(\sqrt{e})$, 且 $1<\sqrt{e}<2<e<\frac{e^2}{2}<4$, 所以 $f(\sqrt{e})>f(2)=f(4)>f\left(\frac{e^2}{2}\right)$, 即 $c>a>b$, 故选 D.
11. B 对于 A, $f(x+\pi)=\frac{-\sin x-\cos x}{\sin x \cos x+1}=-f(x)$, 故 π 不是 $f(x)$ 的周期, 故 A 错误; 对于 B, 令 $t=\sin x+\cos x$, 则 $t=$



$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$, 且 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$, 所以原函数变为 $y=\frac{2t}{t^2+1}$, 当 $t=0$ 时, $y=0$, 当 $t\neq 0$ 时, $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, 又 $\left|t+\frac{1}{t}\right|\geq 2$, 所以 $\frac{1}{y}\leq -1$, 或 $\frac{1}{y}\geq 1$, 所以 $-1\leq y<0$, 或 $0<y\leq 1$, 综上 $-1\leq y\leq 1$, 所以 $f(x)$ 的值域

为 $[-1,1]$, 故 B 正确; 对于 C, $g(x)=\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1}=\frac{\sqrt{2}\sin x}{1-\frac{1}{2}\cos 2x}$, 易得 $g(-x)=-g(x)$, $g(-x)$

$-g(x)=-2g(x)\neq 0$, 所以 $g(-x)\neq g(x)$, 故 C 错误; 对于 D, $g'(x)=\frac{\sqrt{2}\cos x\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\sqrt{2}\sin x\sin 2x}{\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2}$, 所

以 $g'(0)=2\sqrt{2}$, 故 D 错误. 故选 B.

12. C 不妨设 $P\left(\frac{3}{\cos\theta}, \tan\theta\right)$, $\theta\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\alpha=\frac{\tan\theta}{\frac{3}{\cos\theta}-(-3)}=\frac{\sin\theta}{3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{3}\tan\frac{\theta}{2}$, $\tan\beta=-\frac{\tan\theta}{\frac{3}{\cos\theta}-3}$

$-\frac{\sin\theta}{3(1-\cos\theta)}=-\frac{1}{3\tan\frac{\theta}{2}}$, $S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\tan\theta=3\tan\theta=\frac{6\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$, 因此 $\tan\alpha=\frac{1}{3}t$, $\tan\beta=-\frac{1}{3t}$, $S=\frac{6t}{1-t^2}$, 其中

$t=\tan\frac{\theta}{2}$. 对于 A, $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3t}$ 不是定值. 对于 B, 由于 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{4\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{1-(\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2})+\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}}$, 若

$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}$ 为定值, 则 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}$ 为定值, 从而 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 和 $\tan\frac{\beta}{2}$ 是确定的值, 于是 $\tan\alpha, \tan\beta$ 均为定值, 这是不可

能的, 故 B 错误. 对于选项 C, D, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}t-\frac{1}{3t}}{1+\frac{1}{3}t\cdot\frac{1}{3t}}=\frac{3(t^2-1)}{10t}$, 因此 $S\cdot\tan(\alpha+\beta)=-\frac{9}{5}$ 是定值, $\frac{S}{\tan(\alpha+\beta)}$ 不是

定值. 故选 C.

13. $3\sqrt{2}$ 由 $(2a+b)\cdot(a-b)=2a^2-a\cdot b-b^2=20-a\cdot b-4=14$, 得 $a\cdot b=2$, 所以 $|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+2a\cdot b+b^2}=\sqrt{10+4+4}=3\sqrt{2}$.

14. $x-\sqrt{3}y+1=0$, 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}+2=0$, 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$ (写出一个即可得分) 由题意, 得圆 C 与圆 E 相外切, 且

$C(1,0), E(0,\sqrt{3})$, 则 $k_{CE}=-\sqrt{3}$, 过 CE 中点且与 CE 垂直的直线是两圆的内公切线, 其方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 即内公切线方程为 $x-\sqrt{3}y+1=0$; 又圆 C 与圆 E 半径相等, 故外公切线与 CE 平行, 所以圆 C 与圆 E 的

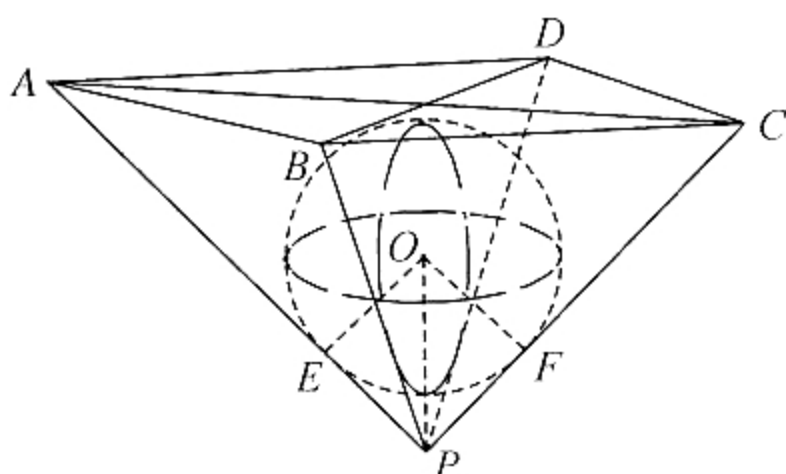
外公切线的方程可设为 $y=-\sqrt{3}x+b$, 即 $\sqrt{3}x+y-b=0$, 则 $\frac{|\sqrt{3}\times 1+0-b|}{2}=1$, 所以 $b=\sqrt{3}+2$ 或 $b=\sqrt{3}-2$, 所以两条

外公切线的方程为 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}+2=0$, 或 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-2=0$.

15. 8π 连接 AC, BD, 由题意得 $PA=PB=PC=PD=AB=BC=CD=DA$, 又 $AC=BD=\sqrt{2}AB$, 所以 $\angle APC=\frac{\pi}{2}$, 设球

O 与 PA, PC 的切点分别为 E, F, 连接 OE, OF, 因为 $OE=OF$, 所以 $\angle OPE=\angle OPF=\frac{\pi}{4}$, 所以 $OE=OP\sin\frac{\pi}{4}=2\times$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$. 即球 O 的半径 $R=\sqrt{2}$, 所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$.



16. $(-2\pi, -1-\pi]$ $f'(x) = \cos x - 2 < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上单调递减, 因为 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上有唯一零点 x_1 , 所以 $f(-\pi) = 2\pi + a > 0$, $f(\pi) = -2\pi + a < 0$, 所以 $-2\pi < a < 2\pi$; $g'(x) = \sin x - 2x + a = f(x)$, 令 $g'(x) = 0$, 即 $f(x) = 0$, 则 $x = x_1$, 且 $-\pi < x < x_1$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x_1 < x < \pi$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\pi, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, π) 上单调递减, 因为 $g(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上有唯一零点 x_2 且 $x_1 < x_2$, 所以 $g(-\pi) = -a\pi - \pi^2 + 1 + a \geq 0$, $g(\pi) = a\pi - \pi^2 + 1 + a < 0$, 所以 $a \leq -1 - \pi$. 综上, 实数 a 的取值范围为 $(-2\pi, -1 - \pi]$.

17. 解: (1) 因为 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{b + c}$, 由正弦定理, 得 $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$ 1 分

所以 $\sin A \cos B + \sin A \cos C = \cos A \sin B + \cos A \sin C$,

所以 $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \cos A \sin C - \sin A \cos C$, 2 分

所以 $\sin(A - B) = \sin(C - A)$ 3 分

因为 $A - B \in (-\pi, \pi)$, $C - A \in (-\pi, \pi)$, 所以 $A - B = C - A$, 或 $(A - B) + (C - A) = 2 \times \frac{\pi}{2}$, 或 $(A - B) + (C - A) =$

$2 \times (-\frac{\pi}{2})$ 4 分

即 $2A = B + C$, 或 $C = B + \pi$ (舍), 或 $B = C + \pi$ (舍),

又 $A + B + C = \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 由题意得 $S_{\triangle DAB} + S_{\triangle DAC} = S_{\triangle ABC}$,

即 $\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin \angle DAB + \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin \angle DAC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \angle BAC$, 7 分

因为 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle DAB = \angle DAC = \frac{\pi}{6}$, 且 $AD = \sqrt{3}$,

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4} AB + \frac{\sqrt{3}}{4} AC = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \cdot AC$,

所以 $AB + AC = AB \cdot AC$, 即 $c + b = cb$, 8 分

由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = (b + c)^2 - 3bc$, 9 分

所以 $(b + c)^2 - 3(b + c) - 18 = 0$, 所以 $b + c = 6$, 或 $b + c = -3$ (舍), 11 分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6 + 3\sqrt{2}$ 12 分

18. 解: (1) $\bar{x} = \frac{2+3+5+6+8+12}{6} = 6$, $\bar{y} = \frac{30+34+40+45+50+60}{6} = \frac{259}{6}$,

$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 12^2 = 282$, 1 分

所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2} = \frac{1752 - 6 \times 6 \times \frac{259}{6}}{282 - 6 \times 6^2} = \frac{198}{66} = 3$,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{259}{6} - 3 \times 6 = \frac{151}{6}$,

所以 $\hat{y} = 3x + \frac{151}{6}$ 3 分

令 $3x + \frac{151}{6} = 100$, 解得 $x = \frac{449}{18} \approx 24.94$ (万元).

故当宣传费用至少为 25 万元时, 销售额能突破 100 万元. 4 分

(2) ① 记事件 A 为抽取的 3 家中含有宣传策划高效的卖场, 事件 B 为抽取的 3 家卖场中恰有 1 家为宣传策划高效. 5 分

由已知数据, 卖场 1, 2 的宣传策划是高效的, 卖场 3, 4, 5, 6 的宣传策划是非高效的,

法一: $P(A) = \frac{C_4^2 C_2^1 + C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4}{5}$, $P(AB) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{4}$ 7 分

法二: $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_4^2 C_2^1 + C_4^1 C_2^2} = \frac{3}{4}$ 7 分

② 由题意知 X 的取值为 0, 1, 2, 则

$$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}, P(X=1)=\frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}, P(X=2)=\frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}, \dots \quad 10 \text{ 分}$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

..... 11 分

$$\text{所以 } E(X)=0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1. \quad \dots \quad 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明: 分别取 AB, A_1D 的中点 O, F , 连接 CO, FO, EF , 则 $CO \perp AB, CO \perp AA_1, OF \parallel AA_1 \parallel BD$, 且 $OF = \frac{AA_1 + BD}{2}$.

..... 2 分

由题意知 $BD = \frac{1}{3} BB_1 = 1$,

所以 $OF = 2$, 又 $OF \parallel AA_1 \parallel CE, CE = 2$, 3 分

所以 $OF \parallel CE$, 且 $OF = CE$, 所以四边形 $CEFO$ 为平行四边形,

所以 $EF \parallel CO$, 所以 $EF \perp AB, EF \perp AA_1$ 4 分

又 $AA_1 \cap AB = A, AA_1, AB \subset \text{平面 } ABB_1A_1$, 所以 $EF \perp \text{平面 } ABB_1A_1$,

因为 $EF \subset \text{平面 } A_1DE$, 所以平面 $A_1DE \perp \text{平面 } ABB_1A_1$ 5 分

(2) 解: 由(1)可得 $CO \perp OF, FO \perp AB, AB \perp CO$, 以 O 为坐标原点, 直线 OB, OC, OF 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 6 分

因为三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\frac{1}{3} S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot B_1D = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} \right) \times B_1D = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } B_1D = 2, \text{ 所以 } BD = 1, \quad \dots \quad 7 \text{ 分}$$

则 $D(1, 0, 1), A_1(-1, 0, 3), E(0, \sqrt{3}, 2), C_1(0, \sqrt{3}, 3)$, 所以 $\overrightarrow{A_1D} = (2, 0, -2), \overrightarrow{A_1C_1} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{A_1E} = (1, \sqrt{3}, -1)$ 8 分

设平面 A_1DE 的一个法向量 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x - 2z = 0, \\ x + \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 解得 $x = 1, y = 0$,

故 $m = (1, 0, 1)$ 9 分

设平面 A_1DC_1 的一个法向量 $n = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2a - 2c = 0, \\ a + \sqrt{3}b = 0, \end{cases}$ 令 $b = 1$, 解得 $a = -\sqrt{3}, c = -\sqrt{3}$,

故 $n = (-\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3})$ 10 分

$$\text{所以 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|} = \frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{42}}{7}. \quad \dots \quad 11 \text{ 分}$$

设二面角 $E-A_1D-C_1$ 的大小为 θ , 则 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \langle m, n \rangle} = \sqrt{1 - \frac{42}{49}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

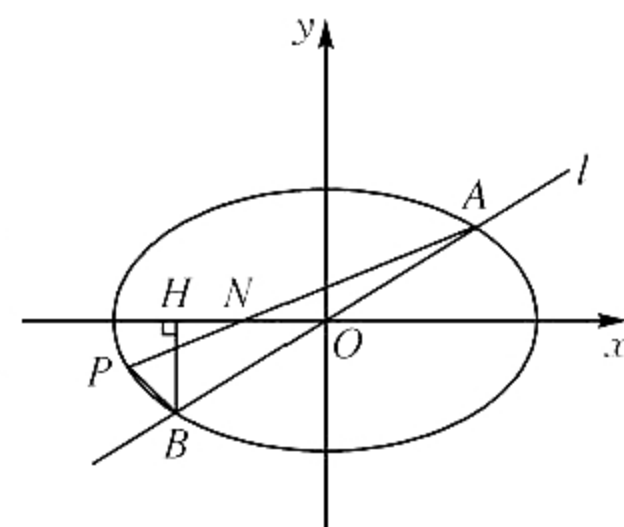
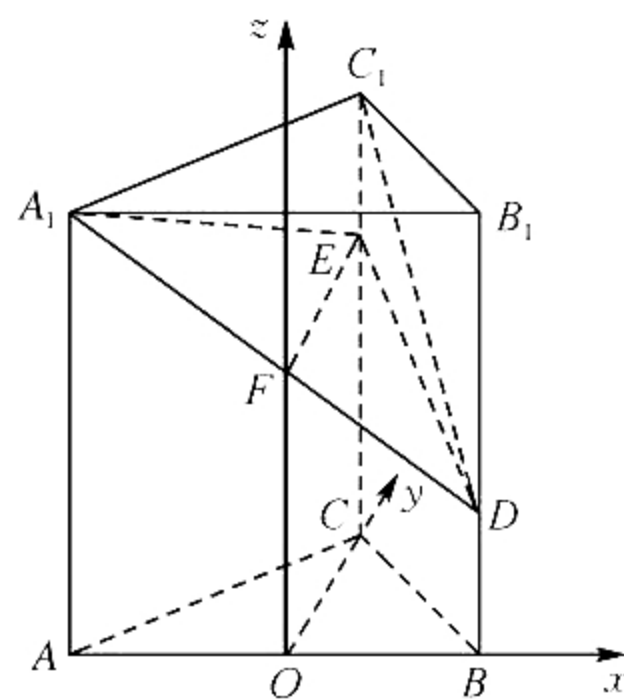
即二面角 $E-A_1D-C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$ 12 分

20. 解: (1) 设 E 的半焦距为 c , 则 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = \sqrt{2}b$. ① 1 分

不妨设 $l: y = \frac{1}{a}x$, 与 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 联立, 得 $|x| = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + 1}}$.

$$\text{由题意得 } |x| = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \quad \text{②} \quad \dots \quad 3 \text{ 分}$$

①②联立并解得 $b^2 = 2, a^2 = 4$, 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分



(2) 设 $A(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$, 则 $B(-x_1, -y_1), H(-x_1, 0), N(-\frac{x_1}{2}, 0)$,

所以直线 AP 的斜率 $k = \frac{y_1 - 0}{x_1 - (-\frac{x_1}{2})} = \frac{2y_1}{3x_1} = \frac{2}{3}k_1$, 6 分

直线 AP 的方程为 $y = k(x + \frac{x_1}{2})$, 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 2k^2x_1x + \frac{1}{2}k^2x_1^2 - 4 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{2k^2x_1}{2k^2 + 1}$, 8 分

$y_1 + y_2 = k(x_1 + \frac{x_1}{2}) + k(x_2 + \frac{x_1}{2}) = k(x_1 + x_2 + x_1) = \frac{kx_1}{2k^2 + 1}$, 9 分

所以 $k_2 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{\frac{kx_1}{2k^2 + 1}}{-\frac{2k^2x_1}{2k^2 + 1}} = -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2 \times \frac{2}{3}k_1} = -\frac{3}{4k_1}$, 10 分

所以 $|k_1 - k_2| = |k_1 + \frac{3}{4k_1}| = |k_1| + \frac{3}{4|k_1|} \geq 2\sqrt{|k_1| \times \frac{3}{4|k_1|}} = \sqrt{3}$, 当且仅当 $|k_1| = \frac{3}{4|k_1|}$, 即 $k_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立, 所以当 $k_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $|k_1 - k_2|$ 取得最小值, 且最小值为 $\sqrt{3}$ 12 分

21. (1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{2x - a}{x^2}$ 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 最多有一个零点, 不合题意, 舍去; 2 分

当 $a > 0$ 时, 当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{a}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 3 分

因为 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则 $f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = 2\ln \frac{a}{2} + 2 < 0$, 解得 $0 < a < \frac{2}{e}$ 4 分

当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(\frac{a}{2}) < 0, f(e) = 2 + \frac{a}{e} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{2}, e)$ 上存在唯一零点;

当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, 取正整数 $n > 2$, 则 $0 < \frac{a}{n} < \frac{a}{2}, f(x) = \frac{2x \ln x + a}{x} > 0 \Leftrightarrow x \ln x > -\frac{a}{2}$,

而 $\frac{a}{n} \ln \frac{a}{n} > -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{a}{n} > -\frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{n} > e^{-\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{a}{2} > \frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$, 当 $x > 1$ 时, 易证 $e^x > x^2$,

又 $\frac{n}{2} > 1$, 所以 $e^{\frac{n}{2}} > (\frac{n}{2})^2$, 于是 $\frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}} < \frac{\frac{n}{2}}{(\frac{n}{2})^2} = \frac{2}{n}$, 要使 $\frac{a}{2} > \frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$, 只需 $\frac{a}{2} \geq \frac{2}{n}$, 即 $n \geq \frac{4}{a}$.

这样, 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, 只需取正整数 $n \geq \frac{4}{a}$, 则 $f(\frac{a}{n}) > 0$.

又 $f(\frac{a}{2}) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 内存在唯一零点.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{2}{e})$ 6 分

(2) 证明: $g(x) = \frac{x}{2}f(x) - ax^2 - x = x \ln x - ax^2 - x + \frac{a}{2}$, 则 $g'(x) = \ln x - 2ax$,

因为 $g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则 $\ln x_1 = 2ax_1, \ln x_2 = 2ax_2$,

要证 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 3$, 只要证 $3 < 2ax_1 + 4ax_2 = 2a(x_1 + 2x_2)$,

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以只要证 $2a > \frac{3}{x_1 + 2x_2}$ 8 分

又由 $\ln x_1 = 2ax_1, \ln x_2 = 2ax_2$, 作差得 $\ln \frac{x_1}{x_2} = 2a(x_1 - x_2)$, 所以 $2a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}$,

所以原不等式等价于 $\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} > \frac{3}{x_1 + 2x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 + 2x_2} = \frac{3(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 2}$.

令 $t = \frac{x_1}{x_2}, t \in (0, 1)$, 只需证明 $\ln t < \frac{3(t-1)}{t+2}$ 10 分

令 $h(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{t+2}, t \in (0, 1)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{9}{(t+2)^2} = \frac{t^2 - 5t + 4}{t(t+2)^2} = \frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2} > 0$, 11 分

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $h(t) < h(1) = 0$, 即 $\ln t < \frac{3(t-1)}{t+2}$.

所以 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 3$ 12 分

22. 解: (1) 由 $\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$, 得 $\rho \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2} = 1$, 即 $\rho - \rho \cos \theta = 2$ 1 分

又 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, x = \rho \cos \theta$, 所以 $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$, 2 分

化简, 得 $y^2 = 4x + 4$, 即 C 的直角坐标方程为 $y^2 = 4x + 4$ 3 分

其与 y 轴交点的直角坐标为 $(0, 2)$ 和 $(0, -2)$, 4 分

对应的极坐标分别为 $(2, \frac{\pi}{2}), (2, \frac{3\pi}{2})$. (答案不唯一, 符合即可得分) 5 分

(2) 易知点 P 的直角坐标为 $(1, 0)$, 将直线 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程, 得 $3t^2 - 8t - 32 = 0$, 6 分

显然 $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-32) = 448 > 0$, 7 分

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = \frac{8}{3}, t_1 t_2 = -\frac{32}{3}$,

显然 t_1, t_2 一正一负, 8 分

所以 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|}$
 $= \frac{\sqrt{(\frac{8}{3})^2 - 4 \times (-\frac{32}{3})}}{\frac{32}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 10 分

23. 解: (1) 当 $x = 4$ 时, 不等式化为 $|16 + 4a + b| \leq 0$,

而 $|16 + 4a + b| \geq 0$,

所以 $|16 + 4a + b| = 0$, ① 2 分

当 $x = -2$ 时, 同理可得 $|4 - 2a + b| = 0$, ② 3 分

联立①和②, 解得 $a = -2, b = -8$ 4 分

而 $a = -2, b = -8$ 时, 原不等式为 $|x^2 - 2x - 8| \leq 2|x^2 - 2x - 8|$,

显然恒成立, 所以 $a = -2, b = -8$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $x^2 - 2x - 8 \geq (m+2)x - m - 15$,

所以 $(x-1)m \leq x^2 - 4x + 7$, 6 分

因为 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0$, 所以 $m \leq \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

令 $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} (x > 1)$, 则 $m \leq y_{\min}$ 7 分

因为 $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} = x - 1 + \frac{4}{x-1} - 2 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} - 2 = 2$, 8 分

当且仅当 $x-1 = \frac{4}{x-1}$, 即 $x = 3$ 时等号成立, 所以 $y_{\min} = 2$, 9 分

所以 $m \leq 2$, 即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 2]$ 10 分