

2023 北京十二中高—12 月月考

数 学

一、选择题（每题 5 分）

1. 设集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{1\}$ B. $\{x \mid x \geq 1\}$ C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ D. $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$

2. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{3x+6}{1-x}}$ 的定义域为 ()

- A. $[-2, 1)$ B. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ C. $[-2, 1]$ D. $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$

3. 若 $\sin \alpha < 0$ 且 $\tan \alpha > 0$, 则 α 的终边所在象限为 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

4. 已知 P : 角 α 的终边过点 $P(1, 2)$, $q: \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 P 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度后, 再向上平移 4 个单位长度, 所得函数图象与曲线 $y = 4^x$ 关于 y 轴对称, 则 $f(-2) =$ ()

- A. -4 B. -2 C. 0 D. 4

6. 函数 $f(x) = ax^2 - (2a-1)x + 3$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

7. 今年 8 月 24 日, 日本不顾国际社会的强烈反对, 将福岛第一核电站核污染废水排入大海, 对海洋生态造成不可估量的破坏. 据有关研究, 福岛核污水中的放射性元素有 21 种半衰期在 10 年以上; 有 8 种半衰期在 1 万年以上. 已知某种放射性元素在有机体体液内浓度 c (Bq/L) 与时间 t (年) 近似满足关系式

$c = k \cdot a^t$ (k, a 为大于 0 的常数且 $a \neq 1$). 若 $c = \frac{1}{6}$ 时, $t = 10$; 若 $c = \frac{1}{12}$ 时, $t = 20$. 则据此估计, 这种有机

体体液内该放射性元素浓度 c 为 $\frac{1}{120}$ 时, 大约需要 () (参考数据: $\log_2 3 \approx 1.58$, $\log_2 5 \approx 2.32$)

- A. 43 年 B. 53 年 C. 73 年 D. 120 年

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & e^{-2} \leq x < e \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 2x$, 设 a 为实数, 若存在实数 m , 使

$f(m) - 2g(a) = 0$, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[-1, 3]$ C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ D. $(-\infty, 3]$

二、填空题（每题 5 分）

9. $3^0 + 8^{\frac{2}{3}} =$ _____, $\lg 6 - \lg\left(\frac{3}{5}\right) + \ln e^2 =$ _____.

10. 将 $-\frac{5\pi}{12}$ rad 转化为角度为 _____, $\sin \frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right) =$ _____.

11. 若 $\tan \theta = 2$, 则 $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

(1) 若 $a = -1$, 则 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上的最小值为 _____.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 4)$ 上存在最小值, 则给出一个 a 的可能值为 _____.

13. 已知函数 $f(x) = x^2 - |x + a|$, 下列命题中:

① $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 都不是 \mathbf{R} 上的单调函数;

② $\exists a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上偶函数;

③ 若 $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{5}{4}$, 则 $a = -1$;

④ $\exists a < 0$, 使得 $f(x)$ 有三个零点.

则所有正确的命题的序号是 _____.

三、解答题

14. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 - (a+1)x + b < 0$.

(1) 若 $a = 1, b = -3$, 求此不等式的解集;

(2) 若不等式的解集是 $\{x | 1 < x < 5\}$, 求 $a + b$ 的值;

(3) 若 $a > 0, b = 1$, 求此不等式的解集.

15. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{a-1}{a^x+1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数

(1) 利用单调性的定义证明: 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(mx^2 - 1) + f(2 - mx) > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 若函数 $g(x) = kf(x) - 3^x$ 有且仅有两个零点, 求实数 k 的取值范围.

参考答案

一、选择题（每题5分）

1. 【答案】A

【分析】由交集的定义求解即可.

【详解】因为 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 2\}$,

所以 $A \cap B = \{1\}$.

故选: A.

2. 【答案】A

【分析】利用给定函数有意义, 列出不等式求解即得.

【详解】函数 $f(x) = \sqrt{\frac{3x+6}{1-x}}$ 有意义, 则 $\frac{3x+6}{1-x} \geq 0$, 即 $\frac{3x+6}{x-1} \leq 0$,

整理得 $\begin{cases} (3x+6)(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $-2 \leq x < 1$,

所以函数 $f(x) = \sqrt{\frac{3x+6}{1-x}}$ 的定义域为 $[-2, 1)$.

故选: A

3. 【答案】C

【分析】根据角的终边的位置与三角函数值符号的关系可出结论.

【详解】因为 $\sin \alpha < 0$, 则 α 的终边在第三、四象限或 y 轴负半轴上,

因为 $\tan \alpha > 0$, 则 α 的终边在第一、三象限,

因此, α 的终边所在象限为第三象限.

故选: C.

4. 【答案】A

【分析】由 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则 α 终边可能落在第一或三象限, 则由两个方向的是否推出关系可得.

【详解】若角 α 的终边经过点 $P(1, 2)$,

则 $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故充分性成立,

若 $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 设 α 的终边上一点为 $P(x, y)$,

则 $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

不妨设 $y = 2t > 0$, 则 $y = \sqrt{5}t, x^2 + y^2 = 5t^2$,

解得 $\begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases}$, 或 $\begin{cases} x=-t \\ y=2t \end{cases}$,

显然当 $\begin{cases} x=-t \\ y=2t \end{cases}$ 时, α 的终边不过点 $P(1,2)$, 故必要性不成立.

综上, p 是 q 的充分不必要条件.

故选: A.

5. 【答案】C

【分析】先根据对称变换和平移变换得到 $f(x) = 4^{-(x+1)} - 4$, 再代入求值即可.

【详解】因为函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度后,

再向上平移 4 个单位长度, 设所得函数图象为 $g(x)$,

因为 $g(x)$ 与曲线 $y = 4^x$ 关于 y 轴对称, 所以 $g(x) = 4^{-x}$,

则 $g(x)$ 向下平移 4 个单位长度, 再向左平移 1 个单位长度后可得 $f(x)$,

则 $f(x) = 4^{-(x+1)} - 4$, 所以 $f(-2) = 4^1 - 4 = 0$.

故选: C.

6. 【答案】D

【分析】分类讨论, 根据一次函数、二次函数性质运算求解即可.

【详解】当 $a = 0$ 时, $f(x) = x + 3$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, 因为函数 $f(x) = ax^2 - (2a-1)x + 3$ 的对称轴为 $x = \frac{2a-1}{2a}$,

若函数 $f(x) = ax^2 - (2a-1)x + 3$ 在区间 $[0, 1]$ 上是增函数,

$$\text{则 } \begin{cases} a > 0 \\ \frac{2a-1}{2a} \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a < 0 \\ \frac{2a-1}{2a} \geq 1 \end{cases}, \text{ 所以 } 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } a < 0;$$

综上, $a \leq \frac{1}{2}$, 故实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

故选: D

7. 【答案】B

【分析】根据已知条件得 $\begin{cases} \frac{1}{6} = k \cdot a^{10} \\ \frac{1}{12} = k \cdot a^{20} \end{cases}$, 解方程组求出 a, k 的值, 当 $c = \frac{1}{120}$ 时, 在等式两边取对数即可

求解.

【详解】由题意得：
$$\begin{cases} \frac{1}{6} = k \cdot a^{10} \\ \frac{1}{12} = k \cdot a^{20} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases},$$

所以 $c = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}},$

当 $c = \frac{1}{120}$ 时, 得 $\frac{1}{120} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}},$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{40},$

两边取对数得 $\frac{t}{10} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{40} = \log_2 40 = 3 + \log_2 5 \approx 3 + 2.32 = 5.32,$

所以 $t = 5.32 \times 10 = 53.2,$

即这种有机体体内该放射性元素浓度 c 为 $\frac{1}{120}$ 时, 大约需要 53 年.

故选: B.

8. 【答案】B

【分析】先根据已知条件求解出 $f(x)$ 的值域以及 $g(x)$ 的最小值, 然后根据题意得到 $2a^2 - 4a$ 与 $f(x)$ 值域的端点的大小关系, 由此求解出 a 的取值范围.

【详解】因为 $g(x) = x^2 - 2x,$ a 为实数, 所以 $2g(a) = 2a^2 - 4a,$

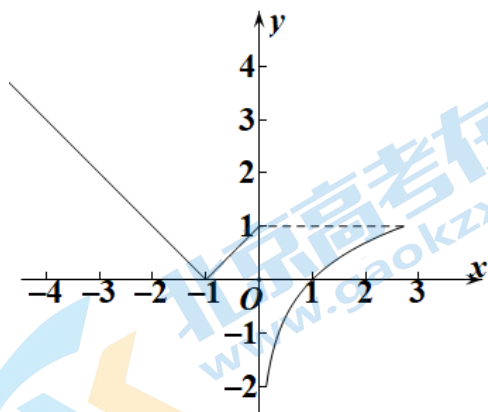
因为 $y = 2a^2 - 4a,$ 所以当 $a = 1$ 时, y 的最小值为 $-2,$

因为函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & -7 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & e^{-2} \leq x \leq e \end{cases}$ 的图象如下图, 且 $f(-7) = 6, f(e^{-2}) = -2, f(e) = 1,$

所以结合图象可知 $f(x)$ 值域为 $[-2, 6],$

因为存在实数 $m,$ 使 $f(m) - 2g(a) = 0,$ 所以 $-2 \leq 2a^2 - 4a \leq 6,$ 即 $-1 \leq a \leq 3,$

故选: B.



【点睛】结论点睛: 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d],$ 有 $f(x_1) = g(x_2),$ 则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子

集.

二、填空题（每题 5 分）

9. 【答案】 ①. 5 ②. 3

【分析】根据指数幂的运算法则和对数的运算法则即得.

【详解】 $3^0 + 8^{\frac{2}{3}} = 1 + (2^3)^{\frac{2}{3}} = 1 + 4 = 5$,

$$\lg 6 - \lg\left(\frac{3}{5}\right) + \ln e^2 = \lg 6 + \lg\left(\frac{5}{3}\right) + 2 = \lg\left(6 \times \frac{5}{3}\right) + 2 = 3.$$

故答案为: 5; 3.

10. 【答案】 ①. -75° ②. $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

【分析】弧度数乘以 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 即为角度数; 应用诱导公式化简求值即可.

【详解】因为 $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$, 所以 $-\frac{5\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -75^\circ$;

$$\sin \frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(-4\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1.$$

故答案为: -75° ; $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

11. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【分析】本题首先可对分式的分子分母同时除 $\cos \theta$, 然后借助公式 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ 以及 $\tan \theta = 2$ 即可得出结果.

【详解】 $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1} = \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} = \frac{1}{3}$, 故答案为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查三角函数的相关性质, 主要考查利用同角三角函数公式进行化简求值, 考查的公式有 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$, 考查化归与转化思想, 是简单题.

12. 【答案】 ①. 0 ②. 2 (答案不唯一)

【分析】(1) 由题意可得 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增, 即可得出答案;

(2) 由双勾函数的性质求解即可.

【详解】(1) 若 $a = -1$, 则 $f(x) = x - \frac{1}{x}$,

因为 $f(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增, 则 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 - 1 = 0$;

(2) 当 $a > 0$ 时, 由双勾函数的性质知,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 在 $(0, \sqrt{a}]$ 上单调递减, 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增,

当 $x > 0$ 时, 则函数 $f(x)$ 在 $x = \sqrt{a}$ 上取得最小值,

所以当 $1 < \sqrt{a} < 4$, 即 $1 < a < 16$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 4)$ 上存在最小值,

所以 a 的可能值为 2.

故答案为: 0; 2 (答案不唯一)

13. 【答案】①②④

【分析】对于①, 分段讨论脱去绝对值符号, 结合二次函数的对称性以及单调性可判断; 对于②, 可取特殊值, 结合奇偶性定义进行判断; 对于③, 分类讨论, 结合二次函数的最小值求出 a 的值, 即可判断; 对于④, 举特殊值, 说明符合题意即可判断.

【详解】对于①, 当 $x \geq -a$ 时, $f(x) = x^2 - x - a$, 其图象为开口向上的抛物线,

对称轴为 $x = \frac{1}{2}$,

当 $x < -a$ 时, $f(x) = x^2 + x + a$, 其图象为开口向上的抛物线,

对称轴为 $x = -\frac{1}{2}$,

即 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - a, & x \geq -a \\ x^2 + x + a, & x < -a \end{cases}$, 且 $(-a)^2 - (-a) - a = a^2$, $(-a)^2 + (-a) + a = a^2$,

即在 $x = -a$ 处的函数值相等,

由于 $f(x) = x^2 + x + a$ 的对称轴在 $f(x) = x^2 - x - a$ 的对称轴的左侧,

则存在区间 $(m, +\infty) \subseteq (-a, +\infty)$, 使 $f(x) = x^2 - x - a$ 在 $(m, +\infty)$ 上递增,

存在区间 $(-\infty, n) \subseteq (-\infty, -a)$, 使 $f(x) = x^2 + x + a$ 在 $(-\infty, n)$ 上递减,

故 $\forall a \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 都不是 \mathbf{R} 上的单调函数, ①正确;

对于②, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = x^2 - |x|$, 定义域为 \mathbf{R} ,

此时 $f(x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数, ②正确;

对于③, 由①的分析可知 $f(x)$ 的最小值在 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ 时取到,

$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - a, & x \geq -a \\ x^2 + x + a, & x < -a \end{cases}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \left|\frac{1}{2} + a\right|$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \left|a - \frac{1}{2}\right|$,

当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 函数最小值在 $x = \frac{1}{2}$ 处取到, 由 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \left|\frac{1}{2} + a\right| = -\frac{5}{4}$,

解得 $a = 1$ 或 $a = -2$ (舍去);

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 函数最小值在 $x = -\frac{1}{2}$ 处取到, 由 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \left|-\frac{1}{2} + a\right| = -\frac{5}{4}$,

解得 $a = -1$ 或 $a = 2$ (舍去);

当 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - a > -\frac{5}{4}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + a > -\frac{5}{4}$ 恒成立,

不合题意, 舍去;

故 $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{5}{4}$, 则 $a = -1$ 或 $a = 1$, ③错误;

对于④, 当 $a < 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - a, & x \geq -a \\ x^2 + x + a, & x < -a \end{cases}$,

当 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - a = 0$, 即 $a = -\frac{1}{4}$ 时, 当 $x \geq \frac{1}{4}$ 时, 令 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$, 解得 $x = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$;

当 $x < \frac{1}{4}$ 时, 令 $x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$, 解得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} < \frac{1}{4}$;

即此时 $f(x)$ 有三个零点, ④正确,

故答案为: ①②④

【点睛】难点点睛: 本题考查了函数的单调性以及奇偶性以及零点问题, 综合性较强, 解答时难点在于二次函数的性质的灵活应用, 要注意分类讨论, 注意函数最值的确定.

三、解答题

14. 【答案】(1) $\{x | -1 < x < 3\}$

(2) $\frac{6}{5}$

(3) 见解析

【分析】(1) 解一元二次方程即可得出答案;

(2) 利用根与系数关系列式, 求得 a, b 的值, 进而求得 $a + b$ 的值.

(3) 将原不等式转化为 $a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x - 1) < 0$, 对 a 分 $a > 1, a = 1, 0 < a < 1$ 三种情况, 讨论不等式的解集.

【小问 1 详解】

若 $a = 1, b = -3$, 则 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 即 $(x - 3)(x + 1) < 0$

解得: $-1 < x < 3$.

所以, 此不等式的解集为 $\{x | -1 < x < 3\}$.

【小问 2 详解】

由题意知 $a > 0$ ，且 1 和 5 是方程 $ax^2 - (a+1)x + b = 0$ 的两根，

$$\therefore 1+5 = -\frac{-(a+1)}{a}, \text{ 且 } 1 \times 5 = \frac{b}{a},$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{5}, b = 1, \therefore a+b = \frac{6}{5}.$$

【小问 3 详解】

若 $a > 0$ ， $b = 1$ ，原不等式为 $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$ ，

$$\therefore (ax-1)(x-1) < 0, \therefore a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1) < 0.$$

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } \frac{1}{a} < 1, \text{ 原不等式解集为 } \left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\},$$

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } \frac{1}{a} = 1, \text{ 原不等式解集为 } \emptyset,$$

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } \frac{1}{a} > 1, \text{ 原不等式解集为 } \left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\},$$

$$\text{综上所述: 当 } a > 1 \text{ 时, 原不等式解集为 } \left\{x \mid \frac{1}{a} < x < 1\right\},$$

当 $a = 1$ 时, 原不等式解集为 \emptyset .

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, 原不等式解集为 } \left\{x \mid 1 < x < \frac{1}{a}\right\}.$$

15. 【答案】(1) 证明见解析

(2) $[0, 4)$

(3) $(3+2\sqrt{2}, +\infty)$

【分析】(1) 先根据奇函数满足 $f(0) = 0$ 可得 $a = 3$ ，再设 $x_2 > x_1$ ，证明 $f(x_2) - f(x_1) > 0$ 即可；

(2) 化简可得 $mx^2 - mx + 1 > 0$ 恒成立，再讨论 m 为 0 和大于 0 时两种情况，结合判别式分析即可；

(3) 将题意转化为方程 $x^2 + (1-k)x + k = 0$ 有两个不相等的正根，

【小问 1 详解】

证明：由函数 $f(x)$ 为奇函数，有 $f(0) = 1 - \frac{a-1}{2} = 0$ ，解得 $a = 3$ ，

$$\text{当 } a = 3 \text{ 时, } f(x) = 1 - \frac{2}{3^x + 1}, f(-x) = 1 - \frac{2}{\frac{1}{3^x} + 1} = 1 - \frac{2 \times 3^x}{3^x + 1} = 1 - \frac{2 \times (3^x + 1) - 2}{3^x + 1} = -1 + \frac{2}{3^x + 1} =$$

$-f(-x)$, 符合函数 $f(x)$ 为奇函数, 可知 $a=3$ 符合题意.

$$\begin{aligned} \text{设 } x_2 > x_1, \text{ 有 } f(x_2) - f(x_1) &= \left(1 - \frac{2}{3^{x_2} + 1}\right) - \left(1 - \frac{2}{3^{x_1} + 1}\right) \\ &= \frac{2}{3^{x_1} + 1} - \frac{2}{3^{x_2} + 1} = \frac{2(3^{x_2} - 3^{x_1})}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)}, \end{aligned}$$

由 $x_2 > x_1$, 有 $3^{x_2} > 3^{x_1}$, 有 $f(x_2) > f(x_1)$, 故函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

【小问 2 详解】

$$\text{由 } f(mx^2 - 1) + f(2 - mx) > 0 \Leftrightarrow f(mx^2 - 1) > -f(2 - mx)$$

$$\Leftrightarrow f(mx^2 - 1) > f(mx - 2)$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - 1 > mx - 2 \Leftrightarrow mx^2 - mx + 1 > 0.$$

(1) 当 $m=0$ 时, 不等式为 $1 > 0$ 恒成立, 符合题意;

(2) 当 $m > 0$ 时, 有 $\Delta = m^2 - 4m < 0$, 解得 $0 < m < 4$,

由上知实数 m 的取值范围为 $[0, 4)$;

【小问 3 详解】

$$\text{由 } g(x) = k\left(1 - \frac{2}{3^x + 1}\right) - 3^x, \text{ 方程 } g(x) = 0 \text{ 可化为 } 3^{2x} + (1-k)3^x + k = 0,$$

若函数 $g(x)$ 有且仅有两个零点, 相当于方程 $x^2 + (1-k)x + k = 0$ 有两个不相等的正根,

$$\text{故有 } \begin{cases} x_1 + x_2 = k - 1 > 0 \\ x_1 x_2 = k > 0 \\ \Delta = (1-k)^2 - 4k > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} k > 1 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \end{cases} \text{ 解得 } k > 3 + 2\sqrt{2}.$$

故实数 k 的取值范围为 $(3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！



微信搜一搜



京考一点通