高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　$\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-3i$.

2. D　因为 $A=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\left\{x|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 6\right\}$，所以 $A\cap B=\{x|3\leqslant x\leqslant 6\}$.

3. C　$1-2\cos^2 67.5^\circ=-(2\cos^2 67.5^\circ-1)=-\cos 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

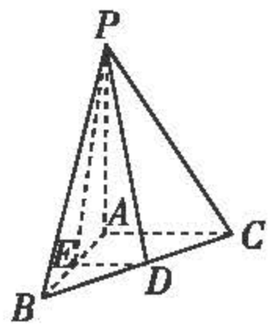
4. B　第一次循环，$S=0+\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$，$k=2$；第二次循环，$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times 4}=\frac{11}{24}$，$k=3$；第三次循环，$S=\frac{11}{24}+\frac{1}{3\times 5}=\frac{21}{40}$，$k=4$.

此时 $\frac{21}{40}>\frac{1}{2}$，故退出循环，输出 $k=4$.

5. A　要求 $f(x)=-\sin 3x$ 的单调递增区间，只需求 $y=\sin 3x$ 的单调递减区间. 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得

$\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

6. D　三棱锥 $P-ABC$ 如图所示，作 $DE\perp AB$，垂足为 E，连接 PE，易知 $\angle EDP$ 就是直线 PD 与 AC 所成的角. 因为 $PA\perp$ 平面 ABC，$AB=4$，$AC=3$，$PA=4$，所以 $DE=\frac{3}{2}$，$PE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 因为 $AC\perp$ 平面 PAB，所以 $DE\perp$ 平面 PAB，所以 $\tan\angle EDP=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.



7. D　由 $f(x+5)=f(x-3)$，得 $f(x+8)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，$f(766)=f(96\times 8-2)=f(-2)$，$f(-2)=f(2)=\log_2 4=2$.

8. B　$\frac{2\sin C}{\sin B}=\frac{2c}{b}=\frac{4}{3}>\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}=\frac{5}{4}$；$\triangle ABC$ 中最大角的余弦值为 $\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times 4\times 5}=\frac{1}{8}$；$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\sqrt{1-(\frac{1}{8})^2}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$. 故 $p_3\wedge p_4$ 为真命题.

9. A　$f'(x)=-\sin x-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$，令 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，即 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x$. $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{2}$，所以 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$，所以直线 $2x+y+1=0$ 与直线 l 垂直.

10. B　因为 $a(b^2+c^2-a^2)=b^2c$，所以 $2a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b$，即 $b=2a\cos A$，所以 $\sin B=2\sin A\cos A=\sin 2A$，所以 $B=2A$ 或 $B+2A=\pi$. 若 $B+2A=\pi$，则 $C=A$，这与题设不合，故 $B=2A$，又 $B=C$，所以 $A+B+C=5A=\pi$，即 $A=\frac{\pi}{5}$.

11. C　直线 AB 的方程为 $3x+4y+15=0$，$|AB|=\sqrt{(-5+1)^2+(0+3)^2}=5$，圆心 $C(1,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|3+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$，点 P 到直线 AB 的最大距离为 $d_{\max}=d+r=\frac{18}{5}+1=\frac{23}{5}$. 故 $\triangle PAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2}\times 5\times\frac{23}{5}=\frac{23}{2}$.

12. C　设直线的倾斜角为 θ，则 $|AB|=\frac{2p}{\cos^2\theta}=\frac{4}{\cos^2\theta}=\frac{25}{4}$，所以 $\cos^2\theta=\frac{16}{25}$，$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{9}{16}$，即 $\tan\theta=\pm\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x+1$. 当直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{4}x+1$，联立 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=\frac{3}{4}x+1\end{cases}$，解得 $x_1=-1$ 和 $x_2=4$，所以 $\frac{|AF|}{|BF|}=\left|\frac{4-0}{0-(-1)}\right|=4$；同理，当直线 l 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+1$，$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$. 综上，$\frac{|AF|}{|BF|}=4$ 或 $\frac{1}{4}$.

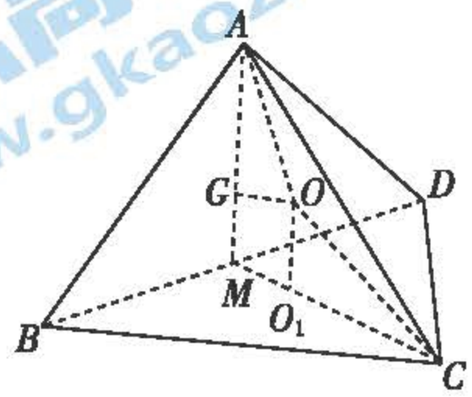
13. $\frac{\pi}{6}$（或 30°）　$\because\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$.

14. $\frac{7}{150}$　由题意可知：弓形的面积 $S_1=\frac{1}{2}\times 1\times(6+1)=\frac{7}{2}$. 设圆的半径为 r，则 $r^2=(r-1)^2+3^2$，解得 $r=5$，所以圆的

面积 $S_2=3r^2=75$，所以质点落在弓形内的概率为 $P=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{7}{2}}{75}=\frac{7}{150}$.

15. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$　根据双曲线的对称性，易知 A,B 两点关于原点 O 对称，因为 $|MA|=|MB|$，所以 $MO\perp AB$，则 $-\frac{2b}{a}=-2$，即 $a=b$，又 $2c=8$，$c=4$，所以 $a^2+b^2=16$，从而 $a^2=b^2=8$，故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

16. $\frac{20\sqrt{15}}{27}\pi$　取 $\triangle BDC$ 的外心为 O_1，设 O 为球心，连接 OO_1，则 $OO_1\perp$ 平面 BDC. 取 BD 的中点 M，连接 AM,O_1M，过 O 做 $OG\perp AM$ 于点 G，易知四边形 OO_1MG 为矩形. 连接 OA,OC，设 $OA=R$，$OO_1=MG=h$. 连接 MC，则 O_1,M,C 三点共线，易知 $MA=MC=\sqrt{3}$，所以 $OG=MO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1C$ 中，$GA^2+GO^2=OA^2$，$O_1C^2+O_1O^2=OC^2$，即 $(\sqrt{3}-h)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$，$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+h^2=R^2$，所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$R^2=\frac{5}{3}$，得 $R=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以 $V_{球O}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{20\sqrt{15}}{27}\pi$.



17. 解：(1)设公比为 q，由 $4(a_3-a_2)=a_4-6$，得 $4(6q-6)=6q^2-6$，…… 2分

化简得 $q^2-4q+3=0$，解得 $q=3$ 或 $q=1$，…… 4分

因为等比数列 $\{a_n\}$ 是递增的，所以 $q=3$，$a_1=2$，…… 5分

所以 $a_n=2\times3^{n-1}$. …… 6分

(2)由(1)得 $b_n=2\times3^{n-1}+2n-1$，…… 7分

所以 $S_n=(2+6+18+\cdots+2\times3^{n-1})+(1+3+5+\cdots+2n-1)$，…… 9分

则 $S_n=\frac{2\times(1-3^n)}{1-3}+\frac{n(1+2n-1)}{2}$，…… 11分

所以 $S_n=3^n-1+n^2$. …… 12分

18. 解：(1)补全 2×2 列联表如下：

	非“环保关注者”	是“环保关注者”	合计
男	10	45	55
女	15	30	45
合计	25	75	100

…… 2分

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算得

K^2 的观测值 $k=\frac{100(45\times15-30\times10)^2}{25\times75\times55\times45}\approx3.03<3.841$，…… 4分

所以在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下，不能认为是否为是“环保关注者”与性别有关. …… 5分

(2)由题可知，利用分层抽样的方法可得男“环保达人”3 人，女“环保达人”2 人. …… 7分

设男“环保达人”3 人分别为 A,B,C；女“环保达人”2 人为 D,E.

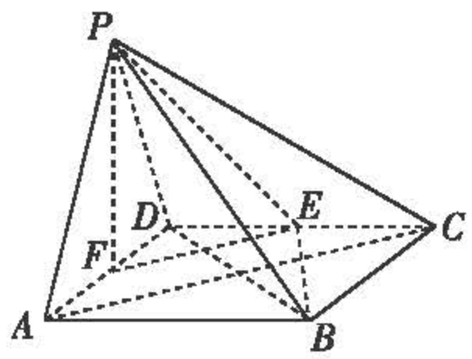
从中抽取两人的所有情况为 $(AB),(AC),(AD),(AE),(BC),(BD),(BE),(CD),(CE),(DE)$，共 10 种情况，

…… 9分

既有男“环保达人”又有女“环保达人”的情况有 $(AD),(AE),(BD),(BE),(CD),(CE)$，共 6 种情况，…… 11分

所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …… 12分

19. (1)证明：取 AD 的中点 F，连接 PF,EF,AC.



因为 $PA=PD$，F 为 AD 的中点，所以 $PF\perp AD$. …… 1分

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$. …… 2分

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp BD$. …… 3分

因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD\perp AC$. …… 4分

因为 E 为 CD 的中点，F 为 AD 的中点，所以 $EF/\!/AC$，所以 $BD\perp EF$. …… 5 分

因为 $PF\subset$ 平面 PEF，$EF\subset$ 平面 PEF，且 $PF\cap EF=F$，所以 $BD\perp$ 平面 PEF. …… 6 分

因为 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $BD\perp PE$. …… 7 分

(2)解：由(1)可知四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 PF.

因为 $PA=PD=4$，$AD=AB=4\sqrt{3}$，$PF\perp AD$，所以 $PF=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$. …… 8 分

因为底面 $ABCD$ 为菱形，$AB=4\sqrt{3}$，$\angle BAD=30°$，

$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times(4\sqrt{3}\times\frac{1}{2})=6$ …… 10 分

所以 $V_{三棱锥B\text{-}PCE}=V_{三棱锥P\text{-}BCE}=\frac{1}{3}\times 6\times 2=4$. …… 12 分

20. 解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $f(x)=x-a\ln x-b$，得 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$，…… 2 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 3 分

当 $a>0$ 时，则 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减；

$x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. …… 5 分

(2)由(1)可知，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$ 与 $f(x)\geqslant 0$ 相矛盾；

当 $a=0$ 时，$\forall x>0$，$f(x)\geqslant 0$，所以 $b\leqslant 0$，此时 $ab=0$. …… 7 分

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

$f(x)_{\min}=f(a)=a-a\ln a-b\geqslant 0$，即 $a-a\ln a\geqslant b$， …… 9 分

则 $ab\leqslant a^2-a^2\ln a(a>0)$. …… 10 分

令 $F(x)=x^2-x^2\ln x(x>0)$，则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$.

令 $F'(x)>0$，则 $0<x<\sqrt{e}$，令 $F'(x)<0$，则 $x>\sqrt{e}$，

当 $x=\sqrt{e}$ 时，$F(x)_{\max}=\frac{e}{2}$，…… 11 分

即当 $a=\sqrt{e}$，$b=\frac{\sqrt{e}}{2}$ 时，ab 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

综上，ab 的最大值为 $\frac{e}{2}$. …… 12 分

21. 解：(1)因为椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2=2b^2$. …… 2 分

因为点 $(\sqrt{2},1)$ 在椭圆 C 上，所以 $\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

由 $\begin{cases}a^2=2b^2,\\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2,\end{cases}$ …… 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. …… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时，直线 MN 的方程为 $x=-1$ 或 $x=1$，此时四边形 $OMDN$ 的面积为 $\sqrt{6}$. …… 5 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程是 $y=kx+m$，

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，消去 y，得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

$\Delta=8(4k^2+2-m^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{2m}{1+2k^2}$. …… 7 分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\times\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}$，…… 8 分

点 O 到直线 MN 的距离是 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$. …… 9 分

由$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$,得 $x_D=\frac{-4km}{1+2k^2}$,$y_D=\frac{2m}{1+2k^2}$.

因为点 D 在曲线 C 上,所以有$\frac{\left(\frac{-4km}{1+2k^2}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{2m}{1+2k^2}\right)^2}{2}=1$,整理得 $1+2k^2=2m^2$. …… 10 分

由题意,四边形 $OMDN$ 为平行四边形,所以四边形 $OMDN$ 的面积为

$S_{OMDN}=|MN|d=\sqrt{1+k^2}\frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{2}|m|\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}$. …… 11 分

由 $1+2k^2=2m^2$,得 $S_{OMDN}=\sqrt{6}$,故四边形 $OMDN$ 的面积是定值,其定值为$\sqrt{6}$. …… 12 分

22. 解:(1)由$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$消去参数,得$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$,

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. …… 2 分

由 $\rho=\frac{m}{2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$,整理得 $\rho\sin\theta-\sqrt{3}\rho\cos\theta=m$, …… 3 分

而 $\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$, …… 4 分

所以 $y-\sqrt{3}x=m$,即 C_2 的直角坐标方程为$\sqrt{3}x-y+m=0$. …… 5 分

(2)由(1)知曲线 C_1 是圆心为$(\sqrt{3},1)$,半径 $r=2$ 的圆, …… 6 分

则圆心$(\sqrt{3},1)$到直线$\sqrt{3}x-y+m=0$ 的距离为$\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$. …… 7 分

所以$|AB|_{\min}=\frac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}-2=1$, …… 9 分

解得 $m=4$ 或 $m=-8$. …… 10 分

23. (1)解:由 $f(0)=-1$,得 $1-|a|=-1$,即 $a=\pm2$. …… 2 分

由 $f(-1)=3$,得$|a+1|-|a-2|=3$,所以 $a=2$. …… 4 分

(2)证明:由(1)知 $f(x)=|2x-1|-|2x+2|$, …… 5 分

所以 $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f(x-1)=|2x-3|-|2x+3|=\begin{cases}6,x\leqslant-\frac{3}{2},\\ -4x,-\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{3}{2},\\ -6,x>\frac{3}{2},\end{cases}$ …… 7 分

显然 $g(x)$的最大值为 6,即 $t=6$. …… 8 分

因为 $m+n=6(m>0,n>0)$,

所以$\frac{4}{m}+\frac{9}{n}=\frac{1}{6}(m+n)\left(\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\right)=\frac{1}{6}\left(13+\frac{4n}{m}+\frac{9m}{n}\right)$. …… 9 分

因为$\frac{4n}{m}+\frac{9m}{n}\geqslant2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{9m}{n}}=12$(当且仅当 $m=\frac{12}{5}$,$n=\frac{18}{5}$时取等号),

所以$\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\geqslant\frac{1}{6}\times(13+12)=\frac{25}{6}$. …… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。