2023 北京一零一中高一（下）期末

数　学

（本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知 $a,b\in\mathbf{R},a+3\mathrm{i}=(b+\mathrm{i})\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则（　）

A. $a=1,b=-3$　　B. $a=-1,b=3$　　C. $a=-1,b=-3$　　D. $a=1,b=3$

2. 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=3$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},1),\vec{b}=(0,-1),\vec{c}=(k,\sqrt{3})$.若 $\vec{a}-2\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线，则 $k=$（　）

A. 1　　B. 3　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{2}$

4. 已知 α 为第二象限角，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（　）

A. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{9}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

5. 对于不重合的两个平面 α 与 β，给定下列条件：

①存在平面 γ，使得 α，β 都垂直于 γ；

②存在平面 γ，使得 α，β 都平行于 γ；

③存在直线 $l\subset\alpha$，直线 $m\subset\beta$，使得 $l//m$；

④存在异面直线 l，m，使得 $l//\alpha$，$l//\beta$，$m//\alpha$，$m//\beta$.

其中，可以判定 α 与 β 平行的条件有（　）

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

6. 若将函数 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x$ 的图象向右平移 φ 个单位，所得图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小正值是（　）

A. $\frac{\pi}{8}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{3\pi}{8}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，“$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$”是“$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 钝角三角形 ABC 的面积是 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$， $AB=1, BC=\sqrt{3}$，则 $AC^2=$（　）

A. $4-\sqrt{3}$　　B. $4+\sqrt{3}$　　C. 7　　D. 7 或 1

9. 已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 4，$\angle BAD=60^\circ$，以 D_1 为球心，$2\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$　　B. $\sqrt{2}\pi$　　C. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　　D. $2\sqrt{2}\pi$

10. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 a 满足 $[-a,a]\subseteq D$，且对任意的 $x_1\in[-a,a]$，总存在 $x_2\in[-a,a]$，使得 $f(x_1)\cdot f(-x_2)=1$，称函数 $f(x)$ 为 $P(a)$ 函数.给出以下四个结论：

①函数 $f(x)=3^x$ 是 $P(1)$ 函数；

②函数 $f(x)=x^3$ 是 $P(2)$ 函数；

③若函数 $f(x)=\log_{12}(x+t)$ 是 $P(2)$ 函数，则 $t=4$；

④若函数 $f(x)=\sin x+b$ 是 $P(\dfrac{\pi}{2})$ 函数，则 $b=\pm\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是（　）

A. ①②　　B. ①③　　C. ①④　　D. ①③④

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若复数 z 满足 $|z|=1$，则 $|z-2\mathrm{i}|$ 的最小值是______.

12. 若圆锥的侧面积为 2π，底面积为 π，则该圆锥的体积为__________.

13. 若 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\alpha+\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\beta=$_______.

14. 已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足：$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，$|\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$，则 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 之间的夹角为______，$\vec{a}\cdot\vec{c}$ 的取值范围是______.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 2，已知点 P，Q 分别是线段 AD_1，AC_1 上的动点（不含端点）.给出下列四个结论：

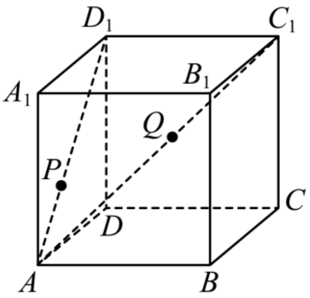
（1）直线 PQ 与直线 B_1C 垂直；

（2）直线 PQ 与直线 CD 不可能平行；

（3）二面角 $P-AC-Q$ 的平面角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

（4）$|PQ|+|QC|$ 的最小值是 $\dfrac{8}{3}$.

其中所有正确结论的序号是______.



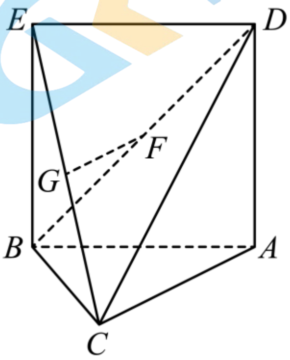
三、解答题共 5 小题，共 55 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16. 已知函数 $f\left(x\right)=2\cos^2 x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期；

（2）将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $g\left(x\right)$ 的图象，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，求 $g\left(x\right)$ 的值域.

17. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，四边形 $ABED$ 是正方形，平面 $ABED\perp$ 平面 ABC，若 G，F 分别是 EC，BD 的中点.



（1）求证：$GF//$ 平面 ABC；

（2）求证：平面 $BCD\perp$ 平面 ACD.

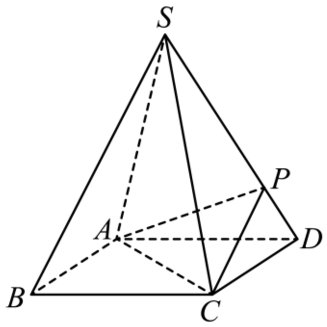
18. 在 $\triangle ABC$ 中，A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin^2 A+\sin^2 C-\sqrt{2}\sin A\sin C=\sin^2 B$，

（1）求 B 的大小；

（2）再从下列三个条件中，选择两个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一，求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①：$b=2$；条件②：$c=\sqrt{3}+1$；条件③：$\sin A=\frac{1}{2}$.

19. 如图，正四棱锥 $S-ABCD$，$SA=SB=SC=SD=4$，$AB=2\sqrt{2}$，P 为侧棱 SD 上的点，且 $SP=3PD$，



（1）求正四棱锥 $S-ABCD$ 的表面积；

（2）求点 S 到平面 PAC 的距离；

（3）侧棱 SC 上是否存在一点 E，使得 $BE//$ 平面 PAC.若存在，求 $\dfrac{SE}{EC}$ 的值；若不存在，试说明理由.

20. 已知有穷数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N\left(N\in\mathbf{N}^*,N\geq 3\right)$ 满足 $a_i\in\left\{-1,0,1\right\}\left(i=1,2,\cdots,N\right)$.给定正整数 m，若存在正整数 $s,t(s\neq t)$，使得对任意的 $k\in\{0,1,2,\cdots,m-1\}$，都有 $a_{s+k}=a_{t+k}$，则称数列 A 是 m-连续等项数列.

（1）判断数列 $A:1,-1,0,-1,0,-1,1$ 是否是 3-连续等项数列，并说明理由；

（2）若项数为 N 的任意数列 A 都是 2-连续等项数列，求 N 的最小值；

（3）若数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_N$ 不是 4-连续等项数列，而数列 $A_1:a_1,a_2,\cdots,a_N,-1$，数列 $A_2:a_1,a_2,\cdots,a_N,0$ 与数列 $A_3:a_1,a_2,\cdots,a_N,1$ 都是 4-连续等项数列，且 $a_3=0$，求 a_N 的值.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	B	C	C	D	B	C

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.1.　　12. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$　　13. $\frac{\pi}{3}$　　14. $\frac{2\pi}{3}$；$[1,3]$.　　15.①②③.

三、解答题共 5 小题，共 55 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.（1）因为 $f(x)=2\cos^2 x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-1$

$=\cos 2x+\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

即 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（2）将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到

$g(x)=\sqrt{3}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

又 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

则 $g(x)\in\left[-\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$，即 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$.

17.（1）证明：如图，取 BE 的中点 H，连接 HF，GH.

$\because G$，F 分别是 EC 和 BD 的中点，$\therefore HG//BC$，$HF//DE$.

又 $\because$ 四边形 $ADEB$ 为正方形，

$\therefore DE//AB$，从而 $HF//AB$.

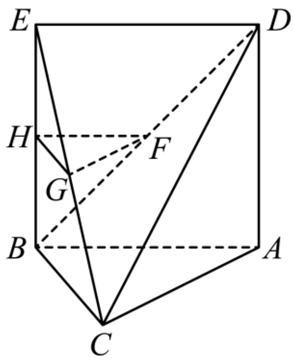
$\because BC\subset$ 平面 ABC，$HG\not\subset$ 平面 ABC，

$\therefore HG//$ 平面 ABC，

同理 HF // 平面 ABC，又 $HG \cap HF = H$， $HG, HF \subset$ 平面 HGF，

$\therefore$ 平面 HGF // 平面 ABC，

$\because GF \subset$ 平面 HGF，则 GF // 平面 ABC .



（2）$\because ADEB$ 为正方形，$\therefore AD \perp AB$.

又平面 $ABED \perp$ 平面 ABC，且平面 $ABED \cap$ 平面 $ABC = AB$， $AD \subset$ 面 $ADEB$，

$\therefore AD \perp$ 平面 ABC，

$\because BC \subset$ 平面 ABC，$\therefore AD \perp BC$，

设 $AB = 1$，$\because AC = BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} AB$，

$\therefore AC = BC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore CA^2 + CB^2 = AB^2$，$\therefore AC \perp BC$.

又 $AD \cap AC = A$， AD， $AC \subset$ 平面 ACD，

$\therefore BC \perp$ 平面 ACD，而 $BC \subset$ 平面 BCD，

$\therefore$ 平面 $BCD \perp$ 平面 ACD .

18.（1）因为 $\sin^2 A + \sin^2 C - \sqrt{2}\sin A \sin C = \sin^2 B$，

由正弦定理得 $a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac = b^2$，

则 $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $B \in (0, \pi)$，所以 $B = \dfrac{\pi}{4}$；

（2）选①②，则 $b = 2, c = \sqrt{3} + 1, B = \dfrac{\pi}{4}$，

由 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\sin B$，

得 $4 = a^2 + 4 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}a\left(\sqrt{3} + 1\right)$，解得 $a = \sqrt{6}$ 或 $a = \sqrt{2}$，

经检验，符合题意，

所以 $\triangle ABC$ 有两解，与题意矛盾.

选①③，则$b=2,\sin A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{\pi}{4}$，

因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\sqrt{2}<b$，故$A<B$，

所以$A=\dfrac{\pi}{6}$，

则$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

选②③，则$c=\sqrt{3}+1,\sin A=\dfrac{1}{2},B=\dfrac{\pi}{4}$，

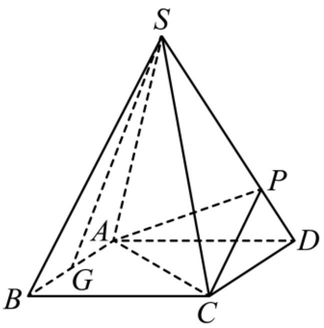
因为$A\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，所以$A=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$\sin C=\sin\left(A+B\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

因为$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以$a=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

19.（1）解：取AB的中点G，连接SG，



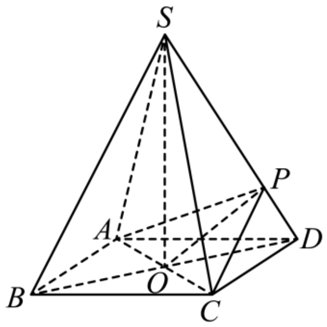
因为$SA=SB=SC=SD=4$，$AB=2\sqrt{2}$，则$SG\perp AB$，

且$SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{4^2-2}=\sqrt{14}$，

所以，正四棱锥$S-ABCD$的表面积为$4S_{\triangle SAB}+S_{\square ABCD}=4\times\dfrac{1}{2}\times AB\times SG+AB^2$

$=2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{14}+8=8+8\sqrt{7}$.

（2）解：连接BD交AC于点O，连接SO、OP，如下图所示：



因为四边形 $ABCD$ 是边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形，则 $BD=\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4=SB=SD$，

故 $\triangle SBD$ 是边长为 4 的等边三角形，

因为 $AC\cap BD=O$，则 O 为 BD、AC 的中点，所以，$SO\perp BD$，

且 $SO=SB\sin60^\circ=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，$\angle OSD=\dfrac{1}{2}\angle BSD=\dfrac{1}{2}\times60^\circ=30^\circ$，

因为 $SP=3PD$，则 $SP=\dfrac{3}{4}SD=\dfrac{3}{4}\times4=3$，

由余弦定理可得 $OP^2=SO^2+SP^2-2SO\cdot SP\cos30^\circ=12+9-2\times2\sqrt{3}\times3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$，

所以，$SP^2+OP^2=SO^2$，所以，$SP\perp OP$，

因为四边形 $ABCD$ 为正方形，则 $AC\perp BD$，

因为 $SA=SC$，O 为 AC 的中点，则 $AC\perp SO$，

因为 $SO\cap BD=O$，SO、$BD\subset$ 平面 SBD，所以，$AC\perp$ 平面 SBD，

因为 $SP\subset$ 平面 SBD，所以，$SP\perp AC$，

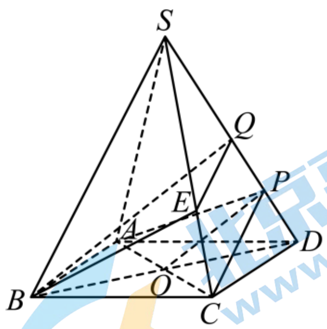
因为 $OP\cap AC=O$，OP、$AC\subset$ 平面 PAC，所以，$SP\perp$ 平面 PAC，

因此，点 S 到平面 PAC 的距离为 $SP=3$.

（3）解：在侧棱 SD 上存在一点 E，使 $BE//$ 平面 PAC，满足 $\dfrac{SE}{EC}=2$，理由如下：

取 SD 的中点为 Q，因为 $SP=3PD$，则 $PQ=PD$，

过 Q 作 PC 的平行线交 SC 于 E，连接 BQ、BE.



在 $\triangle BDQ$ 中，因为 O、P 分别为 BD、DQ 的中点，则 $BQ//PO$，

因为 $PO\subset$ 平面 PAC，$BQ\not\subset$ 平面 PAC，所以 $BQ//$ 平面 PAC，

由 $\frac{SE}{EC}=\frac{SQ}{QP}=2$，则 $QE//PC$，

因为 $PC\subset$ 平面 PAC，$QE\not\subset$ 平面 PAC，所以 $QE//$ 平面 PAC，

而 $BQ\cap QE=Q$，BQ、$QE\subset$ 平面 BEQ，故面 $BEQ//$ 面 PAC，

又 $BE\subset$ 面 BEQ，则 $BE//$ 平面 PAC，此时 $\frac{SE}{EC}=2$.

20. （1）数列 A 是 $3-$ 连续等项数列，理由如下:

数列 $A:1,-1,0,-1,0,-1,1$ 中，$a_2=a_4=-1,a_3=a_5=0,a_4=a_6=-1$，

即有 $a_{2+k}=a_{4+k}(k=0,1,2)$，所以数列 A 是 $3-$ 连续等项数列.

（2）设集合 $S=\{(x,y)\,|\,x\in\{-1,0,1\},y\in\{-1,0,1\}\}$，则 S 中的元素个数为 $3^2=9$，

因为在数列 A 中 $a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,\cdots,N)$，所以 $(a_i,a_{i+1})\in S(i=1,2,\cdots,N-1)$，

若 $N\geq 11$，则 $N-1\geq 10>9$，所以在 $(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_4),\cdots,(a_{N-1},a_N)$ 这 $N-1$ 个有序数对中，

至少有两个有序数对相同，即存在正整数 $s,t(s\neq t)$，使得 $a_s=a_t,a_{s+1}=a_{t+1}$，

所以当项数 $N\geq 11$ 时，数列 A 一定是 $2-$ 连续等项数列，

若 $N=3$，数列 $0,0,1$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=4$，数列 $0,0,1,1$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=5$，数列 $0,0,1,1,0$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=6$，数列 $0,0,1,1,0,-1$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=7$，数列 $0,0,1,1,0,-1,1$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=8$，数列 $0,0,1,1,0,-1,1,-1$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=9$，数列 $0,0,1,1,0,-1,1,-1,-1$ 不是 $2-$ 连续等项数列；

若 $N=10$,数列 $0,0,1,1,0,-1,1,-1,-1,0$ 不是 $2-$ 连续等项数列，

所以 N 的最小值为 11.

（3）因为 A_1,A_2 与 A_3 都是 $4-$ 连续等项数列，

所以存在两两不等的正整数 $i,j,k(i,j,k<N-2)$,使得 $a_i=a_{N-2},a_{i+1}=a_{N-1},a_{i+2}=a_N,a_{i+3}=-1$，

$a_j=a_{N-2},a_{j+1}=a_{N-1},a_{j+2}=a_N,a_{j+3}=0,\ a_k=a_{N-2},a_{k+1}=a_{N-1},a_{k+2}=a_N,a_{k+3}=1$，

下面用反证法证明 $\min\{i,j,k\}=1$，

假设 $\min\{i,j,k\}>1$，因为 $a_{i-1},a_{j-1},a_{k-1},a_{N-3}\in\{-1,0,1\}$，

所以 $a_{i-1},a_{j-1},a_{k-1},a_{N-3}$ 中至少有两个数相等，

不妨设 $a_{i-1}=a_{j-1}$，则 $a_{i-1}=a_{j-1},a_i=a_j,a_{i+1}=a_{j+1},a_{i+2}=a_{j+2}$，

所以 A 是 $4-$连续等项数列，与题设矛盾，所以 $\min\{i,j,k\}=1$，

所以 $a_N=a_{i+2}=a_{j+2}=a_{k+2}=a_3=0$.