2022届高三开年摸底联考 全国卷

文科数学试卷

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x|x^2\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{1,2\}$　　B.$\{1,2,3\}$　　C.$\{0,1,2,3\}$　　D.$\{0,1,2\}$

2.已知复数 z 满足 $z(1+i)=2i$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B.$\sqrt{2}$　　C.1　　D.2

3.设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(x-1),x>2,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x-3,x\leqslant 2,\end{cases}$ 若 $f[f(-3)]=$

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

4.若 $a,b\in\mathbf{N}$，则“a,b 都为偶数”是“$a+b$”为偶数的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

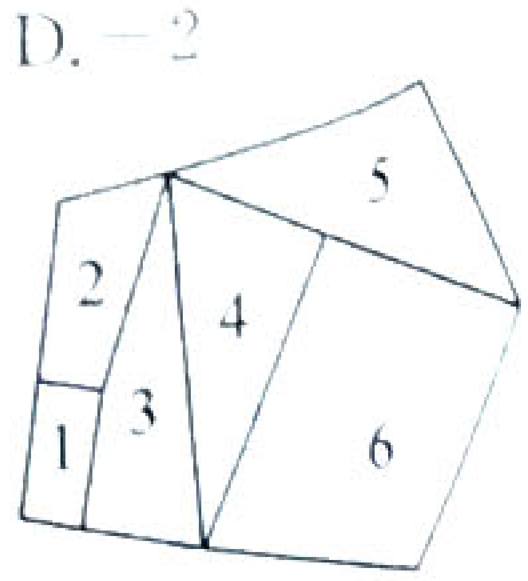
5.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(x,3)$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|$，则 x 的值为

A.-2　　B.-4 或 0　　C.-2 或 0　　D.0

6.已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y-1\leqslant 0,\\ y\leqslant 1,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 设 $z=x-2y$，则 z 最小值为

A.0　　B.1　　C.2　　D.-2

7.公园中有一块如图所示的五边形荒地，公园管理部门计划在该荒地种植126棵观赏树，若1至6六个区域种植的观赏树棵数成等比数列，且前3个区域共种植14棵，则第5个区域种植的树木棵数为



A.16　　B.28

C.32　　D.64

8.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，直线 $y=\sqrt{3}b$ 与双曲线在第一象限交于点 A，若 $\angle FOA=\frac{\pi}{3}$（O 为坐标原点），则该双曲线的离心率为

A.$\sqrt{5}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$\sqrt{7}$　　D.2

9.在三角形 ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a=2b$，且 $2c\sin B=a\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，则角 $C=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

10.如图，正四棱锥（底面为正方形，顶点在底面的射影为底面正方形的中心）$P-ABCD$ 中，$AB=4$，点 E 为 PB 中点，若 CE 与 PD 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为

A. $\frac{32\sqrt{2}}{3}$　　B. $16\sqrt{2}$　　C. $\frac{32}{3}$　　D. $\frac{16}{3}$

11.将函数 $g(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ [illegible] 的图象向左平移 $\frac{T}{m}$ [illegible] 个单位后得到函数 $f(x)$ 的图象，若 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，且 [illegible]，则 ω 的可能取值为

A. [illegible]　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. π

12.已知函数 $f(x)=$ [illegible] 在 $[-2,2]$ 上有两个零点（e 为自然对数的底数），则实数 a 的取值范围为

A. $\left[\frac{1}{2+e^{-2}},1\right)$　　B. $\left[\frac{1}{2+e^{-2}},1\right]$　　C. $(1,2+e^{-2}]$　　D. $[1,2+e^{-2}]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\tan(\pi-\alpha)=$______．

14.将某射击运动员的十次射击成绩（环数）按从小到大的顺序（相等数据相邻排列）排列为 8.1，8.4，8.4，8.7，x，y，9.3，9.6，9.6，9.9，已知总体的中位数为 9，则该组数据的平均数为______．

15.如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，$PA=AB=2$，若该三棱锥的外接球体积为 $4\sqrt{3}\pi$，则 $BC=$______．

16.已知斜率为 $2\sqrt{2}$ 的直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，与抛物线交于 A，B（点 A 在第一象限）两点，且 $|AB|=\frac{9}{2}$，O 为坐标原点，则 $\triangle AOF$ 与 $\triangle BOF$ 的面积之比为______．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：60 分。

17.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_5=25$，且 $3S_{n+1}-a_n=2S_n+S_{n+2}(n\in N^*)$．

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

18.(12 分)

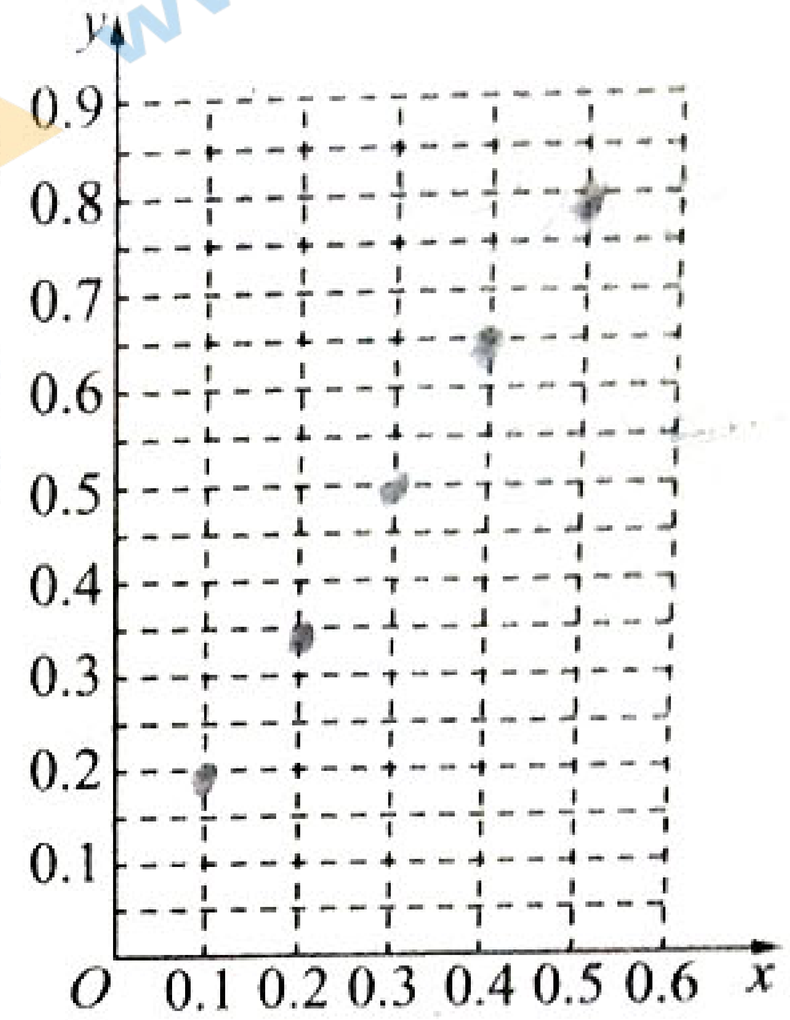
某商业银行对存款利率与日存款总量的关系进行调研,发现存款利率每上升一定的百分点,日均存款总额就会发生一定的变化,经过统计得到下表:

利率上升百分点 x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
日均存款总额 y(亿元)	0.2	0.35	0.5	0.65	0.8

(1)在给出的坐标系中画出上表数据的散点图;

(2)根据上表提供的数据,用最小二乘法求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$;

(3)已知现行利率下的日均存款总额为 0.625 亿元,试根据(2)的线性回归方程,预测日存款总额为现行利率下日存款总额的 2 倍时,利率需上升多少个百分点?



参考公式及数据:①$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$,

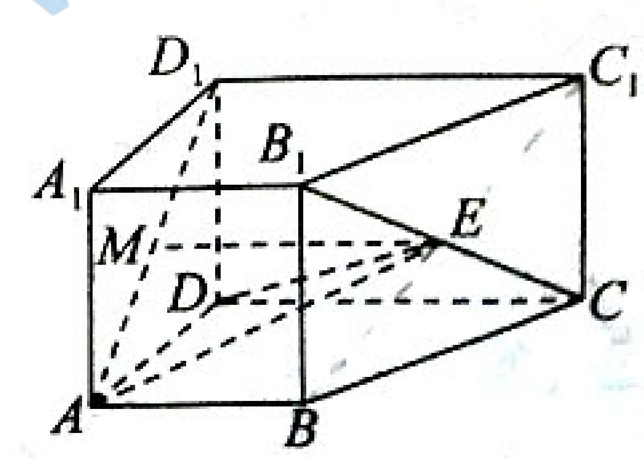
②$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=0.9$,$\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=0.55$.

19.(12 分)

如图,四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,四边形 A_1ADD_1 为矩形,且平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$AB\parallel CD$,$AB=AD=A_1A=\dfrac{1}{2}CD$,$\angle DAB=\dfrac{\pi}{2}$,$M$,$E$ 分别为 AD_1,B_1C 的中点.

(1)证明:$ME\parallel$ 平面 DCC_1D_1;

(2)若 $AB=2$,求点 M 到平面 ADE 的距离.



20.(12 分)

已知函数 $f(x)=(a+1)\ln x+\dfrac{1}{x}-ax\ (0<a<1)$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间;

(2)若 $f(x)$ 存在极大值 M 和极小值 N,证明:$M+N>a-1$.

21.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左,右焦点分别为 F_1,F_2,点 B 为椭圆短轴的一个端点,且 $\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$,$|\overrightarrow{BF_1}+\overrightarrow{BF_2}|=2\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)直线 $l:\sqrt{2}x-2y=0$ 与椭圆 C 交于 M,N 两点,P,Q 为 C 上两点,且直线 $PQ/\!/MN$,求四边形 $MNPQ$ 面积的最大值.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$($t$ 为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$),以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴,建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程;

(2)点 $P(2,0)$,直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,若 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,求直线 l 的普通方程.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知 $f(x)=|a^2x+1|$,$g(x)=|2-\frac{2}{a}x|$.

(1)当 $a=1$ 时,求不等式 $f(x)-g(x)\geqslant-1$ 的解集;

(2)若 $a>0$,$f(1)\leqslant E$,$g(1)\leqslant F$,证明:$E+F\geqslant2$.

2022 届高三开年摸底联考　全国卷 1

文科数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】$B=[-2,2]$，所以 $A\cap B=(0,2]$.

2.B 【解析】$|z|=\dfrac{|2i|}{|1+i|}=\sqrt{2}$.

3.B 【解析】$f(-3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}-3=5$，$f(5)=\log_2(5-1)=2$.

4.D 【解析】由题：$2x+3=\sqrt{x^2+9}$，解得 $x=0$.

5.A 【解析】由 $0<a<1$，$\log_a b<\log_a c\Leftrightarrow b>c>0$，故为充分不必要条件.

6.D 【解析】由可行域易知，当直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}z$ 过点 $(0,1)$ 时，z 取得最小值 -2.

7.C 【解析】由题 $\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=14$，$\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=126$，所以 $\dfrac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=\dfrac{126}{14}=9$，解得 $q=2$，$a_1=2$，故 $a_5=2\times2^4=32$.

8.B 【解析】因为 $a=2b$，由 $2c\sin B=a\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 得 $c\sin B=b\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由正弦定理得 $\sin C\sin B=\sin B\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B\neq0$，故 $\sin C=\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\dfrac{1}{2}\sin C$，得 $\dfrac{1}{2}\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C$，即 $\tan C=\sqrt{3}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$.

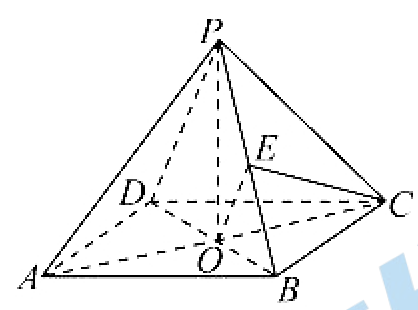
9.C 【解析】设一条渐近线向上的方向与虚轴向上的方向所成的角为 α，则 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{5}{12}$，得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{5}$ 或 $\tan\alpha=-5$(舍)，即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{5}$，故 $\dfrac{b}{a}=5$，所以 $e^2-1=25$，解得 $e=\sqrt{26}$.

10.A 【解析】如图，连接 AC，BD，设交点为 O，连接 PO，OE，则 $OE\parallel PD$，所以 $\angle CEO$ 或其补角即为 CE 与 PD 所成的角，

设 $PD=2x(x>\sqrt{2})$，则 $OE=x$，易知 $OE\perp OC$，$\cos\angle CEO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$CE^2=OE^2+OC^2=x^2+8$，故 $CE=\sqrt{x^2+8}$，所以 $\cos\angle CEO=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$，解得 $x=2$，

$PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=2\sqrt{2}$，所以 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times4\times4\times2\sqrt{2}=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$.



11.C 【解析】由题函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 为偶函数，所以 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，

所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，故 $f(x)=A\cos\omega x$，$f(-1)=A\cos\omega=0$，所以 $\omega=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$f(3)=A\cos3\omega=0$，所以 $3\omega=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 ω 和 3ω 均为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的奇数倍，故 ω 的可能取值为 $\dfrac{3\pi}{2}$.

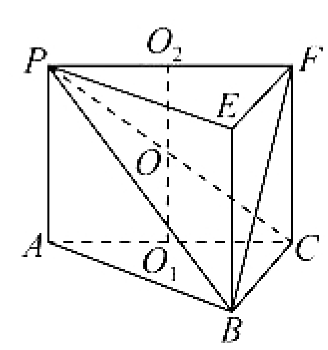
12.D 【解析】由题，函数 $g(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e^2\right]$ 上有两个交点，即方程 $c^x=x$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e^2\right]$ 上有两个不等实根，即 $\ln c=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $\left[\dfrac{1}{e},e^2\right]$ 上有两个不等实根，设函数 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}\left(\dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant e^2\right)$，$h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，易得：当 $\dfrac{1}{e}\leqslant x<e$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $e<x\leqslant e^2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}$，又 $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=-e$，$h(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$，故 $\dfrac{2}{e^2}\leqslant\ln c<\dfrac{1}{e}$，即 $e^{\frac{2}{e^2}}\leqslant c<e^{\frac{1}{e}}$.

13.$\dfrac{1}{10}$ 【解析】由 $\alpha\in(0,\pi)$，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ 得 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}=\dfrac{1-\sin\alpha}{2}=\dfrac{1}{10}$.

14.$\dfrac{2}{9}$ 【解析】因为总体的中位数为 9，所以 $x+y=18$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{18}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(x+y)=\dfrac{1}{18}\left(2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\geqslant\dfrac{1}{18}\left(2+2\sqrt{\dfrac{x}{y}\times\dfrac{y}{x}}\right)=\dfrac{2}{9}$，当且仅当 $x=y=9$ 时等号成立.

15.2 【解析】如图，将三棱锥补成三棱柱，取 AC 中点 O_1，PF 中点 O_2，

外接球球心即为 O_1O_2 的中点 O，设外接球半径为 R，则 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$，



得 $R=\sqrt{3}$，所以 $\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{4+BC^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，得 $BC=2$，所 $S_{\triangle ABC}=2$.

16.4 【解析】易知直线 l 过抛物线的焦点，联立方程可得 $4x^2-5px+p^2=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{5}{4}p$，$x_1x_2=\frac{1}{4}p^2$，又 A，B 到准线的距离分别为 $x_1+\frac{p}{2}$，$x_2+\frac{p}{2}$，所以 $|AB|=\frac{9}{4}p$，四边形 A_1ABB_1 为直角梯形，其高为 $h=\frac{2\sqrt{2}}{3}|AB|=\frac{3\sqrt{2}}{2}p$，所以 $S=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)\times h=\frac{27\sqrt{2}}{16}p^2=27\sqrt{2}$，故 $p=4$.

17.【解析】(1)由 $3S_{n+1}-a_n=2S_n+S_{n+2}$ 得：

$-a_n=2S_n-3S_{n+1}+S_{n+2}=2S_n-2S_{n+1}+S_{n+2}-S_{n+1}=-2a_{n+1}+a_{n+2}$

即 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，…… 2 分

所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，…… 4 分

由 $S_5=5a_3=25$ 得 $a_3=5$，

设公差为 d，$a_3=5=a_1+2d=1+2d$，得 $d=2$，

所以 $a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$，

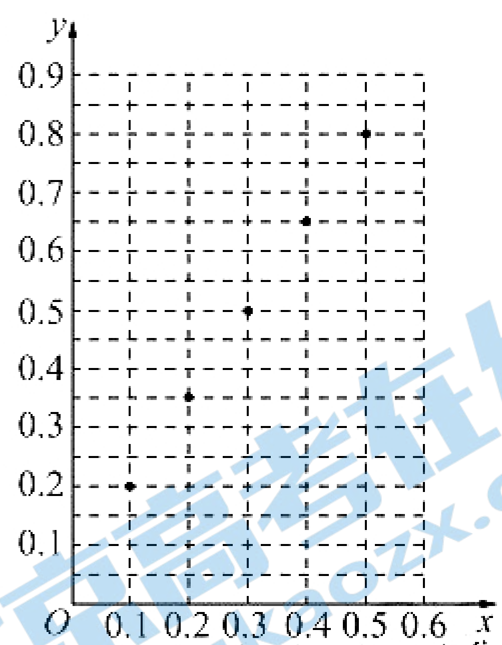
故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$. …… 6 分

(2) $b_n=\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$， …… 8 分

所以 $T_n=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$. …… 10 分

$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$. …… 12 分

18.【解析】(1)如图所示； …… 3 分



(2)由表格数据可得 $\bar{x}=0.3$，$\bar{y}=0.5$， …… 4 分

所以 $\hat{b}=\frac{0.9-5\times0.3\times0.5}{0.55-5\times0.3\times0.3}=1.5$，

$\hat{a}=0.5-1.5\times0.3=0.05$， …… 7 分

故 $\hat{y}=1.5x+0.05$. …… 8 分

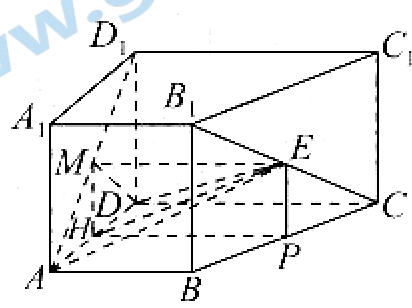
(3)利率需上升 x 个百分点，由(2)得：

$0.625\times2=1.5x+0.05$， …… 11 分

解得 $x=0.8$，

所以利率需上升 0.8 个百分点. …… 12 分

19.【解析】(1)证明：如图，分别取 AD 和 BC 的中点 H，P，连接 MH，HP，PE， …… 1 分



则 $MH\parallel DD_1$，$MH=\frac{1}{2}DD_1$，$PE\parallel CC_1$，$PE=\frac{1}{2}CC_1$，

所以 $MH\parallel PE$，$MH=PE$，

所以四边形 $MHPE$ 为平行四边形， …… 3 分

所以 $ME\parallel PH$，又 $PH\parallel CD$，所以 $ME\parallel CD$，

因为 $CD\subset$ 平面 DCC_1D_1，$ME\not\subset$ 平面 DCC_1D_1，

所以 $ME\parallel$ 平面 DCC_1D_1. …… 4 分

(2)因为四边形 A_1ADD_1 为矩形，所以 $DD_1\perp AD$，

因为平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $A_1ADD_1\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，故 $D_1D\perp CD$，

因为 $AB\parallel CD$，$\angle DAB=\frac{\pi}{2}$，所以 $CD\perp AD$， …… 6 分

因为 $ME\parallel CD$，所以 $ME\perp$ 平面 A_1ADD_1

$V_{M-ADE}=V_{E-ADM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AD\times MH\times ME=\frac{1}{6}\times2\times1\times3=1$. …… 8 分

因为 $AD\perp HP$，$AD\perp MH$，所以 $AD\perp$ 平面 $MHPE$，所以 $AD\perp EH$，

故 $HE=\sqrt{PE^2+HP^2}=\sqrt{10}$

设点 M 到平面 ADE 的距离为 d，

则 $V_{M-ADE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AD\times HE\times d=\frac{\sqrt{10}}{3}d=1.$ ………………………………………… 10 分

解得 $d=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………… 11 分

所以点 M 到平面 ADE 的距离为$\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ………………………………………… 12 分

20.【解析】(1) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a+1}{x}-\frac{1}{x^2}-a=\frac{(x-1)(1-ax)}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{a}$， ………………………………………… 2 分

因为 $0<a<1$，所以$\frac{1}{a}>1$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $1<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当 $x>\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减， ………………………………………… 4 分

综上，$f(x)$的单调递增区间为$\left(1,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间为$(0,1)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知：$M=f\left(\frac{1}{a}\right)=-(a+1)\ln a+a-1$，$N=f(1)=1-a$，

则 $M+N-a=-(a+1)\ln a-a$，设 $g(a)=-(a+1)\ln a-a$， ………………………………………… 6 分

$g'(a)=-\ln a-\frac{1}{a}-2$，令 $h(a)=-\ln a-\frac{1}{a}-2$， ………………………………………… 8 分

$h'(a)=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}=\frac{1-a}{a^2}$，

当 $0<a<1$ 时，$h'(a)>0$，所以 $h(a)$即 $g'(a)$单调递增，又 $g'(a)<g'(1)=-3<0$

所以 $g(a)$在$(0,1)$上单调递减， ………………………………………… 10 分

所以 $g(a)>g(1)=-1$，即 $M+N-a>-1$，

所以 $M+N>a-1$. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设椭圆的半焦距为 c，由$\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BF_2}=0$，得 $b=c$①. ………………………………………… 1 分

又$|\overrightarrow{BF_1}+\overrightarrow{BF_2}|=2\sqrt{2}=2b$，得 $b=\sqrt{2}$……② ………………………………………… 3 分

又 $a^2=b^2+c^2$……③

由①②③解得 $a^2=4$，$b^2=2$，

所以求椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)联立$\begin{cases}\sqrt{2}x-2y=0,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\sqrt{2},\\ y=-1,\end{cases}$

不妨取 $M(\sqrt{2},1)$，$N(-\sqrt{2},-1)$，则$|MN|=2\sqrt{3}$， ………………………………………… 5 分

设直线 PQ：$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m(m\neq0)$，

联立$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $x^2+\sqrt{2}mx+m^2-2=0$，

$\Delta=2m^2-4(m^2-2)>0$，即 $m^2<4$

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\sqrt{2}m$，$x_1x_2=m^2-2$， ………………………………………… 7 分

所以$|PQ|=\sqrt{\frac{3}{2}}|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{12-3m^2}$，

由题知四边形 $MNPQ$ 为梯形，又平行线 MN 与 PQ 之间的距离即原点 O 到 PQ 的距离 d 为梯形的高，

$d=\frac{2|m|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}|m|}{3}$，

所以四边形 $MNPQ$ 的面积 $S=\frac{1}{2}(|MN|+|PQ|)\cdot d=\frac{\sqrt{2}}{2}|m|\cdot(2+\sqrt{4-m^2})$，……………………………… 9 分

设 $t=\sqrt{4-m^2}(0<t<2)$，则 $S^2=\frac{1}{2}(4-t^2)(2+t)^2=-\frac{1}{2}t^4-2t^3+8t+8$，

设 $f(t)=-\frac{1}{2}t^4-2t^3+8t+8$，则 $f'(t)=-2t^3-6t^2+8=-2(t-1)(t^2+4t+4)$，

易知当 $0<t<1$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增，当 $1<t<2$ 时，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单调递减，

所以当 $t=1$ 时 $f(t)$ 取得最大值 $f(1)=\frac{27}{2}$，……………………………… 11 分

所以四边形 $MNPQ$ 的面积 S 的最大值为 $\frac{3}{2}\sqrt{6}$．……………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$，……………………………… 2 分

即 $x^2+y^2=4x+2y$，

即 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$．……………………………… 4 分

(2)将 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha,\end{cases}$ (t 为参数，$0\leqslant\alpha<\pi$)代入 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$，

整理得 $t^2-2t\sin\alpha-4=0$，

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，

则 $t_1+t_2=2\sin\alpha, t_1t_2=-4$，……………………………… 6 分

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|PA|+|PB|}{|PA|\cdot|PB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{4}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{4}=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+4}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………………………… 8 分

故直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数)或 $\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ (t 为参数)，

所以直线 l 的普通方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$．……………………………… 10 分

23.【解析】(1)由题，当 $a=1$ 时，$f(x)-g(x)\geqslant-1\Leftrightarrow|x+1|-|2-2x|\geqslant-1$，……………………………… 1 分

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\geqslant0,\\x\leqslant-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x\geqslant0,\\-1<x<1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-x+4\geqslant0,\\x\geqslant1,\end{cases}$ ……………………………… 3 分

解得 $0\leqslant x\leqslant4$，

所以不等式的解集为 $[0,4]$．……………………………… 5 分

(2)证明：$E+F\geqslant f(1)+g(1)=|a^2+1|+|2-\frac{2}{a}|$ ……………………………… 6 分

$\geqslant|(a^2+1)-\left(2-\frac{2}{a}\right)|=|a^2+\frac{2}{a}-1|$（当且仅当 $2-\frac{2}{a}\leqslant0$ 时，即 $0<a\leqslant1$ 时等号成立）……………………………… 8 分

$=|a^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}-1|$

$\geqslant|3\sqrt[3]{a^2\times\frac{1}{a}\times\frac{1}{a}}-1|=2$（当且仅当 $a^2=\frac{1}{a}$ 时，即 $a=1$ 时等号成立）．……………………………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。