

2021 北京房山高 一（上） 期末

数 学

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 50 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知 $A = (3, -2)$ ， $B = (-1, 2)$ ，则线段 AB 中点的坐标为

- (A) (1, 2) (B) (2, 0)
(C) $(\frac{1}{2}, 2)$ (D) (1, 0)

(2) 某工厂生产了一批节能灯泡，这批产品按质量分为一等品、二等品、不合格品。从这批产品中随机抽取一件进行检测，设“抽到一等品”的概率为 0.75，“抽到二等品”的概率为 0.2，则“抽到不合格品”的概率为

- (A) 0.05 (B) 0.25
(C) 0.8 (D) 0.95

(3) 某单位共有职工 300 名，其中高级职称 90 人，中级职称 180 人，初级职称 30 人。现采用分层抽样方法从中抽取一个容量为 60 的样本，则从高级职称中抽取的人数为

- (A) 6 (B) 9
(C) 18 (D) 36

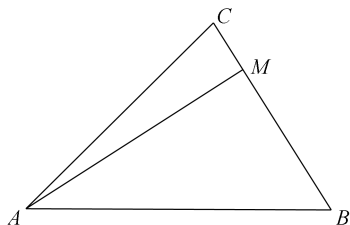
(4) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$ ，且 $x > y > 0$ ，则下列结论正确的是

- (A) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ (B) $x^2 > y^2$
(C) $(\frac{1}{3})^x > (\frac{1}{3})^y$ (D) $\log_3 x < \log_3 y$

(5) 如果函数 $f(x) = 3^x + b$ 的图象经过第一、二、三象限，不经过第四象限，则

- (A) $b < -1$ (B) $-1 < b < 0$
(C) $0 < b < 1$ (D) $b > 1$

(6) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $MC = \frac{1}{4}BC$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ ，则 $\overrightarrow{AM} =$



(A) $\frac{1}{4}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b}$

(B) $\frac{3}{4}\mathbf{a} - \frac{1}{4}\mathbf{b}$

(C) $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$

(D) $\frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$

(7) 已知 $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=4$, 则“ $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=7$ ”是“向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(8) 根据气象学上的标准, 连续5天的日平均气温低于 10°C 即为入冬. 现有甲、乙、丙、丁四地连续5天的日平均温度的记录数据(记录数据都是正整数):

①甲地: 5个数据的中位数为7, 众数为6;

②乙地: 5个数据的平均数为8, 极差为3;

③丙地: 5个数据的平均数为5, 中位数为4;

④丁地: 5个数据的平均数为6, 方差小于3.

则肯定进入冬季的地区是

(A) 甲地

(B) 乙地

(C) 丙地

(D) 丁地

(9) 太阳是位于太阳系中心的恒星, 其质量 M 大约是 2×10^{30} 千克. 地球是太阳系八大行星之一, 其质量 m 大约是 6×10^{24} 千克. 下列各数中与 $\frac{m}{M}$ 最接近的是(参考数据: $\lg 3 \approx 0.4771$, $\lg 6 \approx 0.7782$)

(A) $10^{-5.519}$

(B) $10^{-5.521}$

(C) $10^{-5.523}$

(D) $10^{-5.525}$

(10) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leq e, \\ -\frac{1}{e}x + 2, & x > e, \end{cases}$ 若存在互不相等的实数 a, b, c 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则

abc 的取值范围是

(A) $(0, e)$

(B) $(1, e)$

(C) (1,2e)

(D) (e,2e)

第二部分 (非选择题 共 100 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(11) $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{8^2} = \underline{\hspace{2cm}}$; $\frac{(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^3}{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$.

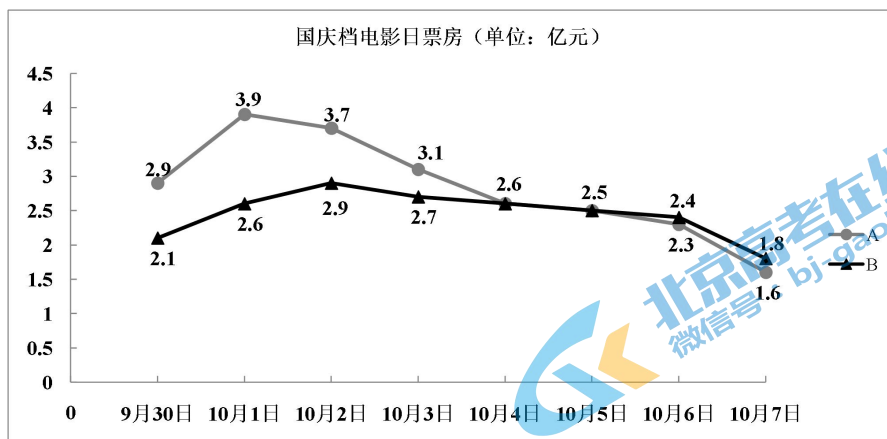
(12) 已知 $a = (-3, 4)$, 则与 a 方向相同的单位向量的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 暑假期间, 甲外出旅游的概率是 $\frac{1}{4}$, 乙外出旅游的概率是 $\frac{1}{5}$, 假定甲乙两人的行动相互之间没有影响, 则暑假期间两人中至少有一人外出旅游的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 当 $2 < x < 3$ 时, 2^x , $\log_2 x$, x^2 的大小关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (请用“<”连接)

(15) 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足: ① $f(x)$ 单调递减; ② $f(0) = 1$, 请写出一个满足条件的函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 由于国庆期间有七天长假, 不少电影选择在国庆档上映. 已知 A、B 两部影片同时在 9 月 30 日全国上映, 每天的票房统计如图所示:



有下列四个结论:

- ①这 8 天 A 电影票房的平均数比 B 电影票房的平均数高;
- ②这 8 天 A 电影票房的方差比 B 电影票房的方差大;
- ③这 8 天 A 电影票房的中位数与 B 电影票房的中位数相同;
- ④根据这 8 天的票房对比, 预测 10 月 8 日 B 电影票房超过 A 电影票房的概率较大;

其中正确结论的序号为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(17) (本小题 15 分)

设两个非零向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不共线。

(I) 若 $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$, 且 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 平行, 求实数 k 的值;

(II) 若 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, 求证: A, B, D 三点共线。

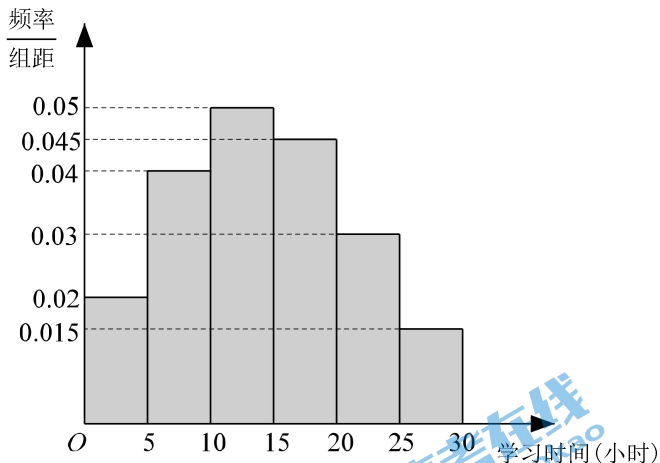
(18) (本小题 15 分)

为了解学生的周末学习时间(单位:小时),高一年级某班班主任对本班 40 名学生某周末的学习时间进行了调查,将所得数据整理绘制出如图所示的频率分布直方图,根据直方图所提供的信息:

(I) 求该班学生周末的学习时间不少于 20 小时的人数;

(II) 估计这 40 名同学周末学习时间的 25% 分位数;

(III) 如果用该班学生周末的学习时间作为样本去推断该校高一年级全体学生周末的学习时间,这样推断是否合理?说明理由。



(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的定义域,并判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(II) 求解关于 x 的不等式 $f(x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x)$.

(20) (本小题 14 分)

空气质量指数是定量描述空气质量状况的指数，空气质量指数的值越高，就代表空气污染越严重，其分级如下表：

| | | | | | | |
|--------|--------|----------|-----------|-----------|-----------|-------|
| 空气质量指数 | 0 ~ 50 | 51 ~ 100 | 101 ~ 150 | 151 ~ 200 | 201 ~ 300 | > 300 |
| 空气质量类别 | 优 | 良 | 轻度污染 | 中度污染 | 重度污染 | 严重污染 |

现分别从甲、乙两个城市 12 月份监测的空气质量指数的数据中随机抽取 6 天的数据，记录如下：

| | | | | | | |
|---|----|----|-----|-----|-----|----|
| 甲 | 48 | 65 | 104 | 132 | 166 | 79 |
| 乙 | 80 | 67 | 108 | 150 | 205 | 62 |

(I) 估计甲城市 12 月份某一天空气质量类别为良的概率；

(II) 分别从甲、乙两个城市的统计数据中任取一个，求这两个数据对应的空气质量类别都为轻度污染的概率；

(III) 记甲城市这 6 天空气质量指数的方差为 S_0^2 。从甲城市 12 月份空气质量指数的数据中再随机抽取一个记为 a ，若 $a = 99$ ，与原有的 6 天的数据构成新样本的方差记为 S_1^2 ；若 $a = 169$ ，与原有的 6 天的数据构成新样本的方差记为 S_2^2 ，试比较 S_0^2 ， S_1^2 ， S_2^2 的大小。（结论不要求证明）

(21) (本小题 12 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D ，若存在正实数 a ，使得对于任意 $x \in D$ ，有 $x+a \in D$ ，且 $f(x+a) > f(x)$ ，则称 $f(x)$ 是 D 上的“ a 距增函数”。

(I) 判断函数 $f(x) = 2^x - x$ 是否为 $(0, +\infty)$ 上的“1 距增函数”？说明理由；

(II) 写出一个 a 的值，使得 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的“ a 距增函数”；

(III) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = |x-a| - a$ 。若 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的“2021 距增函数”，求 a 的取值范围。

2021 北京房山高 一（上） 期末数学

参考答案

一、选择题（每小题 5 分，共 50 分）

| | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | D | A | C | B | B | C | A | D | C | D |

二、填空题（每小题 5 分，共 30 分，有两空的第一空 3 分，第二空 2 分）

(11) $6; ab^{\frac{1}{2}}$

(12) $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$;

(13) $\frac{2}{5}$

(14) $\log_2 x < 2^x < x^2$

(15) 2^{-x} （答案不唯一）

(16) ①, ②, ④

三、解答题（共 5 小题，共 70 分）

(17)（本小题 15 分）

解：

(I) $\mathbf{a} = (1, 2), \mathbf{b} = (-1, 1)$, 则 $k\mathbf{a} + \mathbf{b} = (k-1, 2k+1)$,

$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (3, 0)$

 因为 $k\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 平行, 所以有 $3(2k+1) = 0$

解得 $k = -\frac{1}{2}$.

 (II) 因为 $\overline{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overline{BC} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overline{CD} = \mathbf{a} + 5\mathbf{b}$, 所以

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 3\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$

$\overline{BD} = 3\overline{AB}$, 即

 \overline{AB} 与 \overline{BD} 共线,

 因此 A, B, D 三点共线.

(18)（本小题 15 分）

解:

(I) 由图可知, 该班学生周末的学习时间不少于 20 小时的频率为

$$(0.03 + 0.015) \times 5 = 0.225$$

则 40 名学生中周末的学习时间不少于 20 小时的人数为 $40 \times 0.225 = 9$.

(II) 学习时间在 5 小时以下的频率为 $0.02 \times 5 = 0.1 < 0.25$,

学习时间在 10 小时以下的频率为 $0.1 + 0.04 \times 5 = 0.3 > 0.25$,

所以 25% 分位数在 (5, 10),

$$5 + 5 \times \frac{0.25 - 0.1}{0.2} = 8.75,$$

则这 40 名同学周末学习时间的 25% 分位数为 8.75.

(III) 不合理, 样本的选取只选在高一某班, 不具有代表性.

(19) (本小题 14 分)

解:

$$(I) \text{ 由 } \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2, +\infty)$,

所以函数 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

$$(II) \text{ 由 } f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4),$$

$$\text{得 } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x),$$

因为 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数, 所以有 $0 < x^2 - 4 \leq 3x$,

解得 $2 < x \leq 4$,

因此不等式 $f(x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x)$ 的解集为 $\{x \mid 2 < x \leq 4\}$.

(20) (本小题 14 分)

解:

(I) 甲城市这 6 天内空气质量类别为良的有 2 天, 则估计甲城市 12 月份某一天空气质量类别为良

的概率为 $\frac{1}{3}$.

(II) 由题意, 分别从甲、乙两个城市的统计数据中任取一个, 样本空间记为

$\Omega = \{(48, 80), (48, 67), (48, 108), (48, 150), (48, 205), (48, 62), (65, 80), (65, 67), (65, 108), (65, 150), (65, 205), (65, 62), (104, 80), (104, 67), (104, 108), (104, 150), (104, 205), (104, 62), (132, 80), (132, 67), (132, 108), (132, 150), (132, 205), (132, 62), (166, 80), (166, 67), (166, 108), (166, 150), (166, 205), (166, 62), (79, 80), (79, 67), (79, 108), (79, 150), (79, 205), (79, 62)\}$

有36个样本点，

用 A 表示“这两个数据对应的空气质量类别都为轻度污染”，则

$A = \{(104, 108), (104, 150), (132, 108), (132, 150)\}$ ，包含4个样本点，则

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

$$(III) S_1^2 < S_0^2 < S_2^2.$$

(21) (本小题 12 分)

解：

(I) 函数 $f(x) = 2^x - x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的“1距增函数”

任意 $x \in (0, +\infty)$ ，有 $x+1 \in (0, +\infty)$ ，且 $2^x > 1$

所以 $f(x+1) - f(x) = 2^{x+1} - (x+1) - (2^x - x) = 2^x - 1 > 0$ ，

因此 $f(x) = 2^x - x$ 是 $(0, +\infty)$ 上的“1距增函数”。

(II) $a = 10$ (答案不唯一，不小于4即可)

$$(III) f(x) = \begin{cases} |x-a| - a, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -|x+a| + a, & x \leq 0 \end{cases}$$

因为 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的“2021距增函数”，

i) 当 $x > 0$ 时，由定义 $|x+2021-a| - a > |x-a| - a$ 恒成立

即 $|x+2021-a| > |x-a|$ 恒成立，

由绝对值几何意义可得 $a+a-2021 < 0$ ， $a < \frac{2021}{2}$

ii) 当 $x < 0$ 时，分两种情况：

当 $x < -2021$ 时，由定义 $-|x+2021+a| + a > -|x+a| + a$ 恒成立

即 $|x+2021+a| < |x+a|$ 恒成立, 由绝对值几何意义可得 $-a-a-2021 > 0$, $a < -\frac{2021}{2}$

当 $-2021 \leq x < 0$ 时, 由定义 $-|x+a|+a < |x+2021-a|-a$ 恒成立

即 $|x+2021-a|+|x+a| \geq |2021-2a| > 2a$ 恒成立

当 $a \leq 0$ 时, 显然成立

当 $a > 0$ 时, 可得 $0 < a < \frac{2021}{4}$

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, \frac{2021}{4})$.



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯