2021 北京通州高一（上）期末

数　　学

2021 年 1 月

考生须知	1.本试卷共 4 页，满分 150 分．考试时长 120 分钟． 2.本试卷分为第一部分和第二部分两部分． 3.考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效． 4 .考试结束后，将答题卡交回．

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1．已知集合 $A=\{x\mid x>1\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，则集合 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\mathbf{R}$　　C. $\{x\mid 1<x<2\}$　D. $\{x\mid 1\le x\le 2\}$

2．下列各角中与 60° 终边相同的角是

A．-300°　B. -240°　C. 120°　D. 390°

3. 已知 θ 为第三象限角，则下列判断正确的是

A. $\sin\theta>0$　　　B. $\cos\theta>0$

C. $\sin\theta\bullet\tan\theta>0$　　　D. $\sin 2\theta\bullet\tan\theta>0$

4. 已知函数：① $y=\tan x$，② $y=\sin|x|$，③ $y=|\sin x|$，则其中最小正周期为 π 的是，（　）

A．①②　　B．①③　　C．②③　　D．①②③

5. 已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{3}{x}$，在下列区间中包含 $f(x)$ 零点的区间是

A．(0，1)　B. (1，2)　C. (2，3)　D.(3，4)

6. “$\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\in \mathrm{Z}$”是“$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$”的

A．充分不必要条件 B.必要不充分条件 C.充分必要条件 D.既不充分也不必要条件

7. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$，则 $f(x)$

A.是奇函数，且在 $(0,1)$ 上单调递增　B.是奇函数，且在 $(0,1)$ 上单调递减

C.是偶函数，且在 $(0,1)$ 上单调递增　D.是偶函数，且在 $(0,1)$ 上单调递减

8. 为了得到函数 $y=\cos 2x$ 的图象，可以将函数 $y=\sin 2x$ 的图象

A. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　B. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度　D. 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

9. 函数 $f\left(x\right)=\{\begin{matrix} a^x, x\le 0 \\ 3a-x, x>0 \end{matrix}$ $(a>0且a\ne 1)$ 在 R 上单调递减，则实数 a 的取值范围是

A. $(1,+\infty)$　B. $(0,1)$　C. $[\frac{1}{3},1)$　D. $(0,\frac{1}{3}]$

10. 如果 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，使得对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(-x)\ne -f(x)$，则称该函数 $y=f(x)$ 是“X - 函数”. 若函数 $y=\sin x+\cos x+a$ 是“X - 函数”，则实数 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　B. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　C. $[-1,1]$　D. $[-2,2]$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\sin\frac{5\pi}{6}=$___.

12. 已知某扇形的圆心角是 2，圆心角所对的弧长也是 2，则该扇形的半径为_；面积为___.

13. 若 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，α 是第二象限的角，则 $\tan 2\alpha=$___.

14. 果蔬批发市场批发某种水果，不少于 100 千克时，批发价为每千克 2.5 元，小王携带现金 3000 元到市场采购这种水果，并以此批发价买进，如果购买的水果为 x 千克，小王付款后剩余现金为 y 元，则 x 与 y 之间的函数关系为____；x 的取值范围是____.

15.已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，$f(1+x)=f(1-x)$ 对任意的实数 x 恒成立，且当 $-1\le x\le 1$ 时，$f(x)=x$.则①当 $1\le x\le 3$ 时，$f(x)=$________________；

② $f(2021)=$ ______________

16.已知正 n 边形的边长为 a，其外接圆的半径为 R，内切圆的半径为 r.给出下列四个结论：

① $R=\dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$；② $R=\dfrac{a}{2\sin\frac{2\pi}{n}}$；

③ $R+r=\dfrac{a}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$；④ $R+r=\dfrac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}}$.

其中正确结论的序号是___.

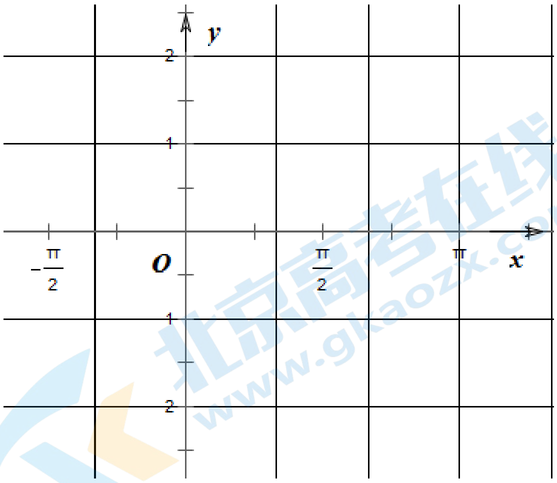
三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.

（I）写出函数 $f(x)$ 的振幅、周期、初相；

（II）用“五点法”作出 $f(x)$ 在一个周期内的图象（先列表，再画图）.



18.（本小题满分 13 分）

已知锐角 α 、β 的终边与单位圆的交点分别为 $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.

（I）求 $\tan\beta$ 及 $\cos(\pi+\alpha)$ 的值；

（II）求 $\sin(\alpha-\beta)$.

19.（本小题满分 13 分）

（1）若 $\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，求 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值；

（2）已知锐角 α,β 满足 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，若 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，求 $\cos\beta$ 的值.

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos(x-\frac{\pi}{3})\sin x$.

（I）求 $f(x)$的最小正周期;

（II）求 $f(x)$的单调区间;

（III）若函数 $f(x)$在$[0,m]$上单调递增，求实数 m 的取值范围.

21.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega_1 x+\sin\omega_2 x$,再从① $\omega_1=1$，$\omega_2=2$； ② $\omega_1=1$，$\omega_2=1$这两个条件中选择一个作为已知条件，完成下面问题.

（I）求 $f(0)$；

（II）写出 $f(x)$ 的最小正周期及一条对称轴方程（只写结果）；

（III）求函数 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

注：如果选择两个条件分别解答，按第一个解答计分。

22.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=\frac{|x|+1}{x^2-1}$.

（I）证明： $f(x)$ 为偶函数;

（II）用定义证明： $f(x)$ 是 $(-1,0)$ 上的增函数;

（III）求满足不等式 $f(\cos x)>f(\sin x)$ 的 x 的范围.

2021 北京通州高一（上）期末数学

参考答案

第一部分

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	D	B	C	A	D	B	D	A

第二部分

二、填空题 共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

11. $\frac{1}{2}$ 12. 1 ； 1 13. $\frac{24}{7}$ 14. $y=3000-2.5x$ ； $[100,1200]$ 15. $2-x$；1 16. ①③

注：第 12、14、15 题第一空 3 分，第二空 2 分；第 16 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 80 分.

17. （本小题满分 12 分）

解:（I）振幅为 2，周期为 π，初相为 $\frac{\pi}{6}$.　　……………………3 分

（II）

x	$-\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$
$2x+\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	2	0	-2	0

……………………8 分

画图略.　　……………………12 分

18. 解：（I）由三角函数定义可知:

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $\cos\alpha=\frac{1}{2}$， $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　……………………4 分

所以 $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=1$.　　……………………6 分

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.　　……………………8 分

（II）$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. ……………………13 分

19．解：（1）$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\dfrac{-\frac{3}{4}+1}{-\frac{3}{4}-1}=-\dfrac{1}{7}$. ……………………5 分

（2）因为α,β为锐角，

所以$0<\alpha+\beta<\pi$，$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$. ……………………6 分

又$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

所以$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{7}$. ……………………8 分

$\cos2\beta=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{2}$ ……………………10 分

又$\cos2\beta=2\cos^2\beta-1$， ……………………11 分

所以$\cos\beta=\sqrt{\dfrac{\cos2\beta+1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………13 分

20．解：因为 $f(x)=2\cos(x-\dfrac{\pi}{3})\sin x$

$=2(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{3})\sin x$

$=\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x$

$=\dfrac{1}{2}\sin2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………4 分

（I）最小正周期为π. ……………………6 分

（II）因为函数$y=\sin x$的单调递增区间是$[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]\ k\in Z$，……………………7 分

由$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le2x-\dfrac{\pi}{3}\le2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

得$k\pi-\dfrac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\dfrac{5\pi}{12}$

所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}]$ $k\in Z$. ……………………9 分

同理可得函数 $f(x)$的单调递减区间为$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}]$ $k\in Z$. ……………………11 分

（III）由（II）可知函数 $f(x)$在$[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$上递增，在$[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}]$上递减，……………………12 分

要使函数 $f(x)$在$[0,m]$上单调递增，则 m 的取值范围是$(0,\frac{5\pi}{12}]$……………………14 分

21。解：选择① $\omega_1=1$，$\omega_2=2$ 作为条件

（I） $f(0)=2$. ……………………2 分

（II） $f(x)$ 的最小正周期为周期为 π， ……………………5 分

$f(x)$ 的最一条对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ $k\in Z$ ……………………8 分

（III） $f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x$

$=(\cos 2x+1)+\sin 2x$

$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)+1$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$. ……………………10 分

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$.

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le 1$.

所以 $0\le f(x)\le 1+\sqrt{2}$.

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，

$f(x)$ 取得最小值为 0. …………………12 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时， $f(x)$ 取得最大值为 $1+\sqrt{2}$. ……………………14 分

选② $\omega_1=1$，$\omega_2=1$ 作为条件

（I） $f(0)=2$. ……………………2 分

（II） $f(x)$ 的最小正周期为周期为 2π， ……………………5 分

$f(x)$ 的最一条对称轴方程为 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ k\in Z$ ……………………8 分

（III） $f(x)=2\cos^2 x+\sin x$

$=2-2\sin^2 x+\sin x$

$=-2(\sin x-\dfrac{1}{4})^2+\dfrac{17}{8}$ ……………………10 分

因为 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$，

所以 $0\le\sin x\le 1$

所以当 $\sin x=\dfrac{1}{4}$ 时， $f(x)$ 取得最大值为 $\dfrac{17}{8}$. ……………………12 分

当 $\sin x=1$ 时 $f(x)$ 取得最小值为 1. ……………………14 分

22. （I）证明： $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in R,且x\ne\pm1\}$. ……………………1 分

因为 $f(-x)=\dfrac{|-x|+1}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|+1}{x^2-1}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数. ……………………3 分

（II）证明： $\forall x_1,x_2\in(-1,0)$，且 $x_1<x_2$，有

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{|x_1|+1}{{x_1}^2-1}-\dfrac{|x_2|+1}{{x_2}^2-1}$

$=-\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}=\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$ ……………………5 分

由 $x_1,x_2\in(-1,0)$， $x_1<x_2$ 可知

$x_1+1>0$， $x_2+1>0$， $x_1-x_2<0$.

于是 $\dfrac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}<0$.

即 $f(x_1)-f(x_2)<0$

所以 $f(x)$ 是 $(-1,0)$ 上的增函数. ……………………7 分

（III）解：因为 $f(x)$ 为偶函数，且是 $(-1,0)$ 上的增函数，

所以 $f(\cos x)>f(\sin x)$ 等价于 $\begin{cases}|\cos x|<|\sin x|\\-1<\cos x<1\\-1<\sin x<1\end{cases}$， ……………………10 分

解得$\begin{cases} k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<k\pi+\dfrac{3\pi}{4} \\ x\neq k\pi \\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$，........................13 分

所以满足不等式 $f(\cos x)>f(\sin x)$ 的 x 的范围

是 $\{x \mid k\pi+\dfrac{\pi}{4}<x<k\pi+\dfrac{3\pi}{4},且x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\}\quad k\in Z$ ....14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。