北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试(文史类)

2017.5

(考试时间 120 分钟　满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

(1)已知 i 为虚数单位,则复数 $z=(1+i)i$ 对应的点位于

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

(2)已知 $x>y$,则下列不等式一定成立的是

(A)$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$　(B)$\log_2(x-y)>0$　(C)$x^3<y^3$　(D)$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^y$

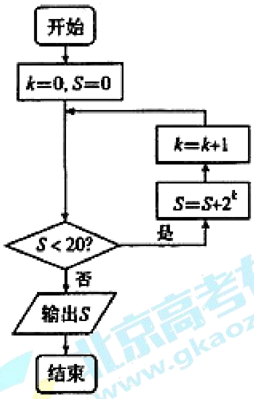
(3)执行如图所示的程序框图,则输出的 S 值是

(A)15

(B)29

(C)31

(D)63



第 3 题图

(4)"$x>0,y>0$"是"$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$"的

(A)充分而不必要条件

(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分也不必要条件

(5)将函数 $f(x)=\cos 2x$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象,若 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调递增,则实数 a 的最大值为

(A)$\frac{\pi}{8}$　(B)$\frac{\pi}{4}$　(C)$\frac{\pi}{2}$　(D)$\frac{3}{4}\pi$

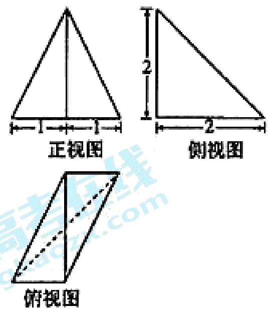
(6)某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长的棱长为

(A)$\sqrt{5}$

(B)$2\sqrt{2}$

(C)3

(D)$3\sqrt{2}$



第 6 题图

(7)已知过定点 $P(2,0)$ 的直线 l 与曲线 $y=\sqrt{2-x^2}$ 相交于 A,B 两点，O 为坐标原点，当 $\triangle AOB$ 的面积最大时，直线 l 的倾斜角为

(A)150°　　(B)135°　　(C)120°　　(D)30°

(8)"现代五项"是由现代奥林匹克之父顾拜旦先生创立的运动项目，包含射击、击剑、游泳、马术和越野跑五项运动．已知甲、乙、丙共三人参加"现代五项"．规定每一项运动的前三名得分都分别为 a,b,c（$a>b>c$ 且 $a,b,c\in \mathbf{N}^*$），选手最终得分为各项得分之和．已知甲最终得 22 分，乙和丙最终各得 9 分，且乙获得了马术比赛的第一名，则游泳比赛的第三名是

(A)甲　　(B)乙

(C)丙　　(D)乙和丙都有可能

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

(9)已知集合 $A=\{x\,|\,2^{x-1}>1\}$，$B=\{x\,|\,x(x-2)<0\}$，则 $A\cap B=$________．

(10)在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$，$B(1,2)$，$C(3,-1)$，点 $P(x,y)$ 为 $\triangle ABC$ 边界及内部的任意一点，则 $x+y$ 的最大值为________．

(11)已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-4$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于________．

(12)设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>0, \\ x^3+a, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $f(1)=$________；若 $f(x)$ 在其定义域内为单调递增函数，则实数 a 的取值范围是________．

(13)已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）与抛物线 $y^2=8x$ 有一个公共的焦点 F．设这两曲线的一个交点为 P，若 $|PF|=5$，则点 P 的横坐标是________；该双曲线的渐近线方程为________．

(14)设 P 为曲线 C_1 上的动点，Q 为曲线 C_2 上的动点，则称 $|PQ|$ 的最小值为曲线 C_1,C_2 之间的距离，记作 $d(C_1,C_2)$．若 $C_1:x^2+y^2=2$，$C_2:(x-3)^2+(y-3)^2=2$，则 $d(C_1,C_2)=$________；若 $C_3:e^x-2y=0$，$C_4:\ln x+\ln 2=y$，则 $d(C_3,C_4)=$________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

(15)（本小题满分 13 分）

在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a>b>c$，$\sqrt{3}c-2b\sin C=0$.

(Ⅰ)求角B的大小；

(Ⅱ)若$b=\sqrt{3}$，$c=1$，求a和$\triangle ABC$的面积．

(16)（本小题满分 13 分）

已知数列$\{a_n\}$是首项$a_1=\frac{1}{3}$，公比$q=\frac{1}{3}$的等比数列．设$b_n=2\log_{\frac{1}{3}}a_n-1\ (n\in \mathbf{N}^*)$.

(Ⅰ)求证：数列$\{b_n\}$为等差数列；

(Ⅱ)设$c_n=a_n+b_{2n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

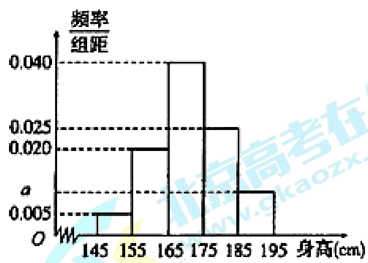
(17)（本小题满分 13 分）

从某中学随机选取了 40 名男生，将他们的身高作为样本进行统计，得到如图所示的频率分布直方图．观察图中数据，完成下列问题．

(Ⅰ)求a的值及样本中男生身高在$[185,195]$（单位：cm）的人数；

(Ⅱ)假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计该校全体男生的平均身高；

(Ⅲ)在样本中，从身高在$[145,155)$和$[185,195]$（单位：cm）内的男生中任选两人，求这两人的身高都不低于 185cm 的概率．



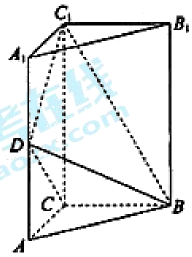
(18)(本小题满分 14 分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1\perp$底面 ABC,$\angle ACB=90°$,$AC=BC=1$,$AA_1=2$,D 是棱 AA_1 的中点.

(Ⅰ)求证:B_1C_1∥平面 BCD;

(Ⅱ)求三棱锥 $B-C_1CD$ 的体积;

(Ⅲ)在线段 BD 上是否存在点 Q,使得 $CQ\perp BC_1$? 请说明理由.



(19)(本小题满分 14 分)

已知椭圆 W:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一个焦点坐标为$(\sqrt{3},0)$.

(Ⅰ)求椭圆 W 的方程和离心率;

(Ⅱ)若椭圆 W 与 y 轴交于 A,B 两点(A 点在 B 点的上方),M 是椭圆上异于 A,B 的任意一点,过点 M 作 $MN\perp y$ 轴于 N,E 为线段 MN 的中点,直线 AE 与直线 $y=-1$ 交于点 C,G 为线段 BC 的中点,O 为坐标原点. 求$\angle OEG$ 的大小.

(20)(本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$,$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x-a(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)若直线 $x=m(m>0)$与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 分别交于 M,N 两点. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线为 l_1,$y=g(x)$ 在点 N 处的切线为 l_2.

(ⅰ)当 $m=e$ 时,若 $l_1\perp l_2$,求 a 的值;

(ⅱ)若 l_1∥l_2,求 a 的最大值;

(Ⅱ)设函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在其定义域内恰有两个不同的极值点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$. 若 $\lambda>0$,且 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 恒成立,求 λ 的取值范围.

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试(文史类)

2017.5

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	D	C	A	B	C	A	B

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

题号	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
答案	$\{x\mid 1<x<2\}$	3	$\frac{\pi}{3}$	$2;(-\infty,1]$	$3;y=\pm\sqrt{3}x$	$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln 2$

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分. 解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.

(15)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)因为$\sqrt{3}c-2b\sin C=0$,

所以$\sqrt{3}\sin C-2\sin B\sin C=0$.

因为$0<C<\pi$,所以 $\sin C\neq 0$,

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$0<B<\pi$,且 $a>b>c$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$. …………6 分

(Ⅱ)因为 $b=\sqrt{3}$,$c=1$,

所以由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

得$(\sqrt{3})^2=a^2+1-2a\times 1\times\frac{1}{2}$,即 $a^2-a-2=0$.

解得 $a=2$ 或 $a=-1$(舍).

所以 $a=2$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………13 分

(16)(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)由已知得:$a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$b_n=2\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^n-1=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

则 $b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$.

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项,2 为公差的等差数列. …………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_{2n}=4n-1$，

则数列$\{b_{2n}\}$是以 3 为首项，4 为公差的等差数列.

$c_n=a_n+b_{2n}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+4n-1.$

则 $T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+3+7+\cdots+(4n-1).$

即 $T_n=\dfrac{\frac{1}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{(3+4n-1)n}{2}.$

即 $T_n=2n^2+n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*).$ …………13 分

（17）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据题意，得

$(0.005+a+0.020+0.025+0.040)\times10=1.$

解得 $a=0.010.$

所以样本中男生身高在[185，195]内（单位：cm）的人数为

$40\times0.01\times10=4.$ …………4 分

（Ⅱ）设样本中男生身高的平均值为$\bar{x}$，则

$\bar{x}=150\times0.05+160\times0.2+170\times0.4+180\times0.25+190\times0.1$

$=7.5+32+68+45+19=171.5.$

所以，估计该校全体男生的平均身高为 171.5cm. …………8 分

（Ⅲ）样本中男生身高在[145，155）内的人有

$40\times0.005\times10=2$（个），记这两人为 A,B.

由（Ⅰ）可知，男生身高在[185，195]内的人有 4 个，记这四人为 a,b,c,d.

所以，身高在[145，155）和[185，195]内的男生共 6 人.

从这 6 人中任意选取 2 人，有 $ab,ac,ad,aA,aB,bc,bd,bA,bB,cd,cA,cB,dA,dB,AB$，

共 15 种情况.

设所选两人的身高都不低于 185cm 为事件 M，

事件 M 包括 ab,ac,ad,bc,bd,cd 共 6 种情况.

所以，所选两人的身高都不低于 185cm 的概率为

$P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}.$ …………13 分

(18)(本小题满分 14 分)

解:(Ⅰ)在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$B_1C_1 /\!/ BC$,

且 $BC \subset$ 平面 BCD,$B_1C_1 \not\subset$ 平面 BCD,

所以 $B_1C_1 /\!/$ 平面 BCD. …………4 分

(Ⅱ)因为 $AA_1 \perp$ 底面 ABC,$\angle ACB = 90°$,

所以 $AA_1 \perp BC$,$AC \perp BC$,则 $BC \perp$ 平面 AA_1C_1C.

即 $BC \perp$ 平面 C_1CD.

所以 $V_{B-CC_1D} = \frac{1}{3}S_{\triangle C_1CD} \cdot BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}CC_1 \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$. …9 分

(Ⅲ)因为在侧面 ACC_1A_1 中,$AC = \frac{1}{2}AA_1$,$AA_1 \perp AC$,D 是棱 AA_1 的中点,

所以 $\angle A_1DC_1 = 45°$,$\angle ADC = 45°$. 则 $C_1D \perp DC$.

因为 $BC \perp$ 平面 C_1CD,所以 $BC \perp C_1D$.

所以 $C_1D \perp$ 平面 BCD.

又 $C_1D \subset$ 平面 C_1DB,

所以平面 $BCD \perp$ 平面 C_1DB,且平面 $BCD \cap$ 平面 $C_1DB = BD$.

过点 C 作 $CQ \perp BD$ 于 Q,所以 $CQ \perp$ 平面 C_1DB.

则 $CQ \perp BC_1$.

所以在线段 BD 上存在点 Q,使得 $CQ \perp BC_1$. …………14 分

(19)(本小题满分 14 分)

解:(Ⅰ)依题意得,$a=2$,$c=\sqrt{3}$,所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$.

则椭圆 W 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. …………4 分

(Ⅱ)设 $M(x_0, y_0)$,$x_0 \neq 0$,则 $N(0, y_0)$,$E\left(\frac{x_0}{2}, y_0\right)$.

又 $A(0,1)$,所以直线 AE 的方程为 $y - 1 = \frac{2(y_0-1)}{x_0}x$.

令 $y=-1$,则 $C\left(\frac{x_0}{1-y_0}, -1\right)$.

又 $B(0,-1)$,G 为线段 BC 的中点,所以 $G\left(\frac{x_0}{2(1-y_0)}, -1\right)$.

所以 $\overrightarrow{OE} = \left(\frac{x_0}{2}, y_0\right)$,$\overrightarrow{GE} = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1-y_0)}, y_0 + 1\right)$,

$\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{GE} = \frac{x_0}{2}\left(\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1-y_0)}\right) + y_0(y_0+1)$

$=\frac{x_0^2}{4}-\frac{x_0^2}{4(1-y_0)}+y_0^2+y_0$.

因为点 M 在椭圆 W 上，则 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，所以 $x_0^2=4-4y_0^2$.

则 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}=1-\frac{x_0^2}{4(1-y_0)}+y_0=1-y_0-1+y_0=0$.

因此 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$. 故 $\angle OEG=90°$. …………14 分

(20)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$.

$f'(x)=1+\ln x, g'(x)=ax+1$.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，$f'(\mathrm{e})=2, g'(\mathrm{e})=a\mathrm{e}+1$.

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $f'(\mathrm{e})\cdot g'(\mathrm{e})=-1$.

即 $2(a\mathrm{e}+1)=-1$.

解得 $a=-\frac{3}{2\mathrm{e}}$. ………………3 分

（ⅱ）因为 $l_1/\!/l_2$，则 $f'(m)=g'(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

即 $\ln m-am=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

设 $F(x)=\ln x-ax, x>0$,

则 $F'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

(1) 当 $a\leqslant0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，则函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

1°当 $a<0$ 时，取 $x=\mathrm{e}^a$，$F(\mathrm{e}^a)=a-a\mathrm{e}^a=a(1-\mathrm{e}^a)<0$.

取 $x=\mathrm{e}$，$F(\mathrm{e})=1-a\mathrm{e}>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在零点.

2°当 $a=0$ 时，$F(x)=\ln x$ 存在零点，$x=1$，满足题意.

(2) 当 $a>0$ 时，令 $F'(x)=0$，则 $x=\frac{1}{a}$.

则 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上为增函数，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上为减函数.

所以 $F(x)$ 的最大值为 $F\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}-1\geqslant0$.

解得 $0<a\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$.

取 $x=1$，$F(1)=-a<0$.

因此当 $a\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ 时，方程 $F(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

所以，a 的最大值是 $\frac{1}{\mathrm{e}}$. …………8 分

（Ⅱ）$h(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a(x>0)$，

$h'(x)=\ln x-ax$.

因为 x_1,x_2 是 $h(x)$ 在其定义域内的两个不同的极值点，

所以 x_1,x_2 是方程 $\ln x-ax=0$ 的两个根．

即 $\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$.

两式作差得，$a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

因为 $\lambda>0,0<x_1<x_2$，

由 $\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$ 得 $1+\lambda<\ln x_1+\lambda\ln x_2$.

则 $1+\lambda<a(x_1+\lambda x_2)\Leftrightarrow a>\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

$\Leftrightarrow\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

$\Leftrightarrow\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{(1+\lambda)(x_1-x_2)}{x_1+\lambda x_2}$.

令 $t=\frac{x_1}{x_2}$，则 $t\in(0,1)$，由题意知：

$\ln t<\frac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$ 在 $t\in(0,1)$ 上恒成立，

令 $\varphi(t)=\ln t-\frac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$，

则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\frac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$.

（1）当 $\lambda^2\geqslant1$，即 $\lambda\geqslant1$ 时，

$\forall t\in(0,1)$，$\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增．

又 $\varphi(1)=0$，则 $\varphi(t)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立．

（2）当 $\lambda^2<1$，即 $0<\lambda<1$ 时，

$t\in(0,\lambda^2)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 在 $(0,\lambda^2)$ 上为增函数；

当 $t\in(\lambda^2,1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 在 $(\lambda^2,1)$ 上为减函数．

又 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(t)$ 不恒小于 0，不合题意．

综上，$\lambda\in[1,+\infty)$. …………13 分