石景山区2020届第一学期高三期末

数 学

本试卷共5页，满分为150分，考试时间为120分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡．

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$， $B=\{-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{0,2\}$　　C. $\{-1,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

2. 复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数在复平面内对应的点所在象限为

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数中既是奇函数，又在区间 $(0,1)$ 上单调递减的是

A. $f(x)=x^3$　　B. $f(x)=\lg|x|$　　C. $f(x)=-x$　　D. $f(x)=\cos x$

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,m)$， $\boldsymbol{b}=(2,-2)$，若 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则实数 $m=$

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. -2

5. 我国古代数学名著《数书九章》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为

A. 134石　　B. 169石　　C. 338石　　D. 1365石

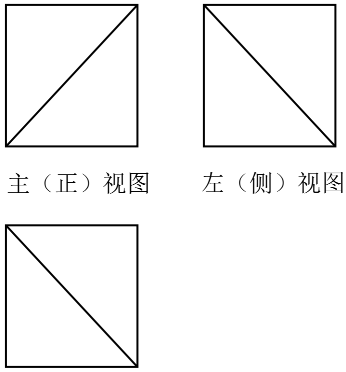
6. 已知 $a=\log_3 4$， $b=\log_\pi 3$， $c=\sqrt{5}$，则 a， b， c 的大小关系是

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $b<a<c$

7. 艺术体操比赛共有 7 位评委分别给出某选手的原始评分，评定该选手的成绩时，从 7 个原始评分中去掉 1 个最高分、1 个最低分，得到 5 个有效评分．5 个有效评分与 7 个原始评分相比，不变的数字特征是

A. 中位数　　B. 平均数　　C. 方差　　D. 极差

8. 一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如右图，则截去部分体积与原正方体体积的比值为



主（正）视图　　左（侧）视图

俯视图

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{7}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{5}$

9. 在等差数列$\{a_n\}$中，设$k,l,p,r\in\mathbf{N}^*$，则$k+l>p+r$是$a_k+a_l>a_p+a_r$的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 关于曲线$C: x^2+xy+y^2=4$．给出下列三个结论：

① 曲线C恰好经过6个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

② 曲线C上任意一点到原点的距离都不大于$2\sqrt{2}$；

③ 曲线C上任意一点到原点的距离都不小于2．

其中，正确结论的个数是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

11. 在 $(x-\frac{2}{x})^6$ 的二项展开式中，常数项等于__________．（用数字作答）

12. 已知双曲线标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，则其焦点到渐近线的距离为________．

13. 已知数列 $\{a_n+n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 为等比数列，$a_1=1$，$a_2=2$，则 $a_3=$________．

14. 已知平面 α,β,γ．给出下列三个论断：①$\alpha\perp\beta$；②$\alpha\perp\gamma$；③$\beta\,/\!/\,\gamma$．以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：____．

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c．已知 $b-c=\frac{1}{4}a$，

$2\sin B=3\sin C$，则 $\cos A$ 的值为_______．

16. 已知向量 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是平面 α 内的一组基向量，O 为 α 内的定点，对于 α 内任意一点 P，当 $\overrightarrow{OP}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$ 时，则称有序实数对 (x,y) 为点 P 的广义坐标，若点 A、B 的广义坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2)，对于下列命题：

① 线段 AB 的中点的广义坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$；

② 向量 $\overrightarrow{OA}$ 平行于向量 $\overrightarrow{OB}$ 的充要条件是 $x_1y_2=x_2y_1$；

③ 向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直于向量 $\overrightarrow{OB}$ 的充要条件是 $x_1x_2+y_1y_2=0$．

其中，真命题是________．（请写出所有真命题的序号）

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\dfrac{1}{2}$．

（Ⅰ）若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，求 $f(\alpha)$ 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期，及函数 $f(x)$ 的单调递减区间.

18.（本小题 13 分）

一款小游戏的规则如下：每盘游戏都需抛掷骰子三次，出现一次或两次“6 点”获得 15 分，出现三次“6 点”获得 120 分，没有出现“6 点”则扣除 12 分(即获得－12 分).

（Ⅰ）设每盘游戏中出现“6 点”的次数为 X，求 X 的分布列；

（Ⅱ）玩两盘游戏，求两盘中至少有一盘获得 15 分的概率；

(Ⅲ）玩过这款游戏的许多人发现，若干盘游戏后，与最初的分数相比，分数没有增加反而减少了．请运用概率统计的相关知识分析解释上述现象.

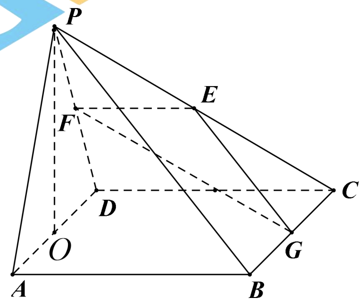
19.（本小题 14 分）

已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，$CD\perp$平面 PAD， E、F、G、O 分别是 PC、PD、BC、AD 的中点.

（Ⅰ）求证：$PO\perp$平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的大小；

(Ⅲ）线段 PA 上是否存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$，若存在，求线段 PM 的长度；若不存在，说明理由.



20.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$.（$a\in\mathbf{R}$）

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $a=3$，$f(x)$ 的图象与 y 轴交于点 A，求 $y=f(x)$ 在点 A 处的切线方程；

（Ⅲ）在（Ⅱ）的条件下，证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>x^2-3x+1$ 恒成立.

21.（本小题 13 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 过点 $P(2,1)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程，并求其离心率；

（Ⅱ）过点 P 作 x 轴的垂线 l，设点 A 为第四象限内一点且在椭圆 C 上（点 A 不在直线 l 上），直线 PA 关于 l 的对称直线 PB 与椭圆交于另一点 B．设 O 为坐标原点，判断直线 AB 与直线 OP 的位置关系，并说明理由.

22.（本小题 13 分）

已知由 $n\,(n\in\mathbf{N}^*)$ 个正整数构成的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(a_1<a_2<\cdots<a_n,n\geqslant 3)$，记 $S_A=a_1+a_2+\cdots+a_n$，对于任意不大于 S_A 的正整数 m，均存在集合 A 的一个子集，使得该子集的所有元素之和等于 m.

（Ⅰ）求 a_1,a_2 的值；

（Ⅱ）求证："$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列"的充要条件是"$S_A=\dfrac{n(n+1)}{2}$"；

（Ⅲ）若 $S_A=2020$，求 n 的最小值，并指出 n 取最小值时 a_n 的最大值.

石景山区 2020 届第一学期高三期末

数学试卷答案及评分参考

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	B	B	D	A	C	D	C

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分．

11．-160；　　12．1；　　13．　5；

14．①③⇒②　或②③⇒①；　　15．$-\frac{1}{4}$；　　16．　①②　．

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题 13 分）

解：（I）因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$．　　……………2 分

所以 $f(\alpha)=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}=\frac{28}{25}-\frac{1}{2}=\frac{31}{50}$．　　……………5 分

（II）$f(x)=\cos x(\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}=\cos x\cdot\sin x+\cos^2 x-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin 2x+\cos 2x)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$　　……………8 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．　　……………9 分

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

解得 $k\pi+\frac{\pi}{8}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{8},k\in\mathbf{Z}$．　　……………11 分

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间 $\left[k\pi+\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{5\pi}{8}\right],k\in\mathbf{Z}$．　　……………13 分

18.（本小题 13 分）

解：（I）X 可能的取值为 0，1，2，3. ……………1 分

每次抛掷骰子，出现"6 点"的概率为 $p=\frac{1}{6}$.

$P(X=0)=C_3^0(1-\frac{1}{6})^3=\frac{125}{216}$，　　$P(X=1)=C_3^1\frac{1}{6}\cdot(1-\frac{1}{6})^2=\frac{75}{216}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{6})^2\cdot(1-\frac{1}{6})=\frac{15}{216}$，　$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$，

……………5 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

……………6 分

（II）设"第 i 盘游戏获得 15 分"为事件 $A_i(i=1，2)$，则

$P(A_1)=P(A_2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$. ……………8 分

所以"两盘游戏中至少有一次获得 15 分"的概率为 $1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=\frac{95}{144}$

因此，玩两盘游戏至少有一次获得 15 分的概率为 $\frac{95}{144}$. ……………10 分

（III）设每盘游戏得分为 Y.

由（I）知，Y 的分布列为：

Y	-12	15	120
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{216}$

Y 的数学期望为 $EY=-12\times\frac{125}{216}+15\times\frac{5}{12}+120\times\frac{1}{216}=-\frac{5}{36}$. ……12 分

这表明，获得分数 Y 的期望为负.

因此，多次游戏之后分数减少的可能性更大. ……………13 分

19.（本小题 14 分）

（I）证明:因为△PAD 是正三角形，O 是 AD 的中点，所以 $PO\perp AD$.

又因为 $CD\perp$ 平面 PAD，$PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp CD$.

$AD\cap CD=D$，AD，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

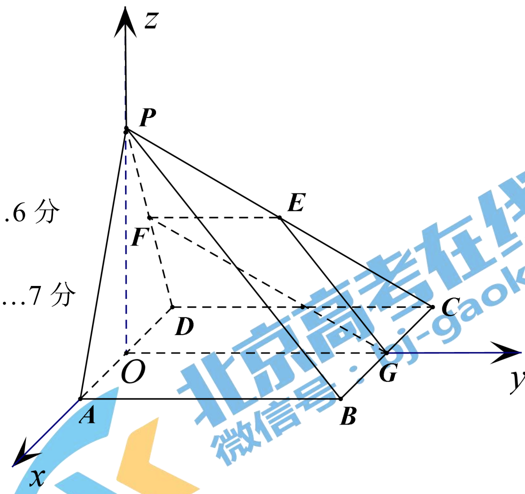
所以 $PO\perp$ 面 $ABCD$. ……………4 分

（II）如图，以 O 点为原点分别以 OA、OG、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.

则 $O(0,0,0),A(2,0,0),B(2,4,0),C(-2,4,0),D(-2,0,0),G(0,4,0),P(0,0,2\sqrt{3})$，

$E(-1,2,\sqrt{3}),F(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,0),\overrightarrow{EG}=(1,2,-\sqrt{3})$，

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,



$$\begin{cases}-2y=0,\\ x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,1)$， ……………6 分

又平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$， ……………7 分

设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 θ，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$.

所以平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\dfrac{\pi}{3}$. ……………9 分

（III）假设线段 PA 上存在点 M，使得直线 GM 与平面 EFG 所成角为 $\dfrac{\pi}{6}$，

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PA},\lambda\in[0,1]$，

$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{GP}+\lambda\overrightarrow{PA}$，

所以 $\overrightarrow{GM}=(2\lambda,-4,2\sqrt{3}(1-\lambda))$. ……………11 分

所以 $\sin\dfrac{\pi}{6}=|\cos<\overrightarrow{GM},\vec{m}>=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+7}}$， …………13 分

整理得 $2\lambda^2-3\lambda+2=0$，无解，

所以，不存在这样的点 M. ………14 分

20.（本小题 14 分）

解：（I）$f'(x)=e^x-a$， ……………1 分

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)\ge 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递增， ……………3 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\ln a$.

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	减	极小值	增

所以 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. …5 分

（II）令 $x=0$，得 $y=1$，则 $A(0,1)$， …………6 分

因为 $f'(x)=e^x-3$，所以 $f'(0)=1-3=-2$， …………7 分

所以在 A 点处的切线方程为 $y-1=-2(x-0)$，即 $y=-2x+1$. ………9 分

（III）证明：令 $g(x)=f(x)-(x^2-3x+1)=e^x-x^2-1$，

则 $g'(x)=e^x-2x$.

令 $h(x)=e^x-2x$，则 $h'(x)=e^x-2$，

当 $0<x<\ln 2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x>\ln 2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增； …………11 分

所以 $h(x)\ge h(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2>0$，即 $g'(x)>0$ 恒成立.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=1-0-1=0$，…………13 分

所以 $e^x-x^2-1>0$，即当 $x>0$ 时，$f(x)>x^2-3x+1$ 恒成立．…………14 分

21.（本小题 13 分）

解：（I）由椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 过点 $P(2,1)$，

可得 $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{2}=1$，解得 $a^2=8$．…………2 分

所以 $c^2=a^2-b^2=8-2=6$，…………3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．…………5 分

（II）直线 AB 与直线 OP 平行．…………6 分

证明如下：由题意，设直线 $PA:y-1=k(x-2)$，$PB:y-1=-k(x-2)$，

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2k+1\end{cases}$ 得

$(4k^2+1)x^2+8k(1-2k)x+16k^2-16k-4=0$，…………8 分

所以 $2+x_1=\dfrac{8k(2k-1)}{4k^2+1}$，所以 $x_1=\dfrac{8k^2-8k-2}{4k^2+1}$，同理 $x_2=\dfrac{8k^2+8k-2}{4k^2+1}$，

所以 $x_1-x_2=-\dfrac{16k}{4k^2+1}$，…………10 分

由 $y_1=kx_1-2k+1$，$y_2=-kx_2+2k+1$，

有 $y_1-y_2=k(x_1+x_2)-4k=-\dfrac{8k}{4k^2+1}$，

因为 A 在第四象限，所以 $k\neq 0$，且 A 不在直线 OP 上，所以 $k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2}$，

又 $k_{OP}=\dfrac{1}{2}$，故 $k_{AB}=k_{OP}$，所以直线 AB 与直线 OP 平行． …………13 分

22.（本题 13 分）

解:（I）由条件知 $1\le S_A$，必有 $1\in A$，又 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 均为整数，$a_1=1$． ……2 分

$2\le S_A$，由 S_A 的定义及 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 均为整数，必有 $2\in A$，$a_2=2$．

……………4 分

（II）必要性：由“$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列”及 $a_1=1,a_2=2$

得 $a_i=i(i=1,2,\cdots,n)$ 此时 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 满足题目要求

从而 $S_A=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$． ……………6 分

充分性：由条件知 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，且均为正整数，可得 $a_i\ge i(i=1,2,3,\cdots,n)$，

故 $S_A\ge 1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$，当且仅当 $a_i=i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 时，上式等号成立.

于是当 $S_A=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 时，$a_i=i(i=1,2,3,\cdots,n)$，从而 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列.

所以“$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成等差数列”的充要条件是“$S_A=\dfrac{1}{2}n(n+1)$”. ……8 分

（III）由于含有 n 个元素的非空子集个数有 2^n-1，故当 $n=10$ 时，$2^{10}-1=1023$，

此时 A 的非空子集的元素之和最多表示 1023 个不同的整数 m，不符合要求.

而用 11 个元素的集合 $A=\{1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024\}$ 的非空子集的元素之和可以表示 $1,2,3,\cdots,2046,2047$ 共 2047 个正整数.

因此当 $S_A=2020$ 时，n 的最小值为 11. ……………10 分

当 $S_A=2020$ 时，n 的最小值为 11.记 $S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

则 $S_{10}+a_{11}=2020$ 并且 $S_{10}+1\ge a_{11}$.

事实上若 $S_{10}+1<a_{11}$，$2020=S_{10}+a_{11}<2a_{11}$，则 $a_{11}>1010$，$S_{10}<a_{11}<1010$，

所以 $m=1010$ 时无法用集合 A 的非空子集的元素之和表示，与题意不符.

于是 $2020=S_{10}+a_{11}\geq 2a_{11}-1$，得 $a_{11}\leq\dfrac{2021}{2}$， $a_{11}\in N^{*}$，所以 $a_{11}\leq 1010$.

当 $a_{11}=1010$ 时 $A=\{1,2,4,8,16,32,64,128,256,499,1010\}$ 满足题意

所以当 $S_{A}=2020$ 时，n 的最小值为 11，此时 a_{n} 的最大值 1010.　　……13 分

【若有不同解法，请酌情给分】