2023 北京通州高一（下）期末

数　学

2023 年 7 月

本试卷共 4 页，150 分，考试时长 120 分钟，考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合愿目要求的一项．

1. 已知 P 是复平面内表示复数 $a+b\mathrm{i}\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$ 的点，若复数 $a+b\mathrm{i}$ 是虚数，则点 P（　）

A. 在虚轴上　　B. 不在虚轴上　　C. 在实轴上　　D. 不在实轴上

2. 对于任意两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，下列命题中正确的是（　）

A. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$　　B. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

C. $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$　　D. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $2a\cos B=c$．则 $\triangle ABC$ 一定是（　）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 等边三角形

4. 从甲、乙、丙、丁四人中随机选取两人，则甲被选中的概率为（　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 已知一组数据有 40 个，把它分成六组，第一组到第四组的频数分别为 10，5，7，6，第五组的频率是 0.20，则第六组的频率是（　）

A. 0.10　　B. 0.12　　C. 0.15　　D. 0.18

6. 某市 6 月前 10 天的空气质量指数为 35，54，80，86，72，85，58，125，111，58，则这组数据的第 70 百分位数是（　）

A. 86　　B. 85.5　　C. 85　　D. 84.5

7. 下列命题正确的是（　）

A. 一条线段和不在这条线段上的一点确定一个平面

B. 两条不平行的直线确定一个平面

C. 三角形上不同的三个点确定一个平面

D. 圆上不同的三个点确定一个平面

8. 若 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同平面，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$．则“$\alpha/\!/\beta$”是“$m/\!/n$”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

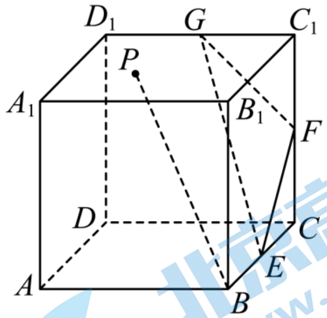
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 设l是直线，α，β是两个不同平面，则下面命题中正确的是（　）

A. 若$l /\!/ \alpha$，$l \parallel \beta$，则$\alpha /\!/ \beta$　　B. 若$l /\!/ \alpha$，$l \perp \beta$，则$\alpha \perp \beta$

C. 若$l \perp \beta$，$\alpha \perp \beta$，则$l /\!/ \alpha$　　D. 若$l /\!/ \alpha$，$\alpha \perp \beta$则$l \perp \beta$

10. 如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E,F,G分别是棱BC,CC_1,C_1D_1的中点，点P为底面$A_1B_1C_1D_1$上在意一点，若直线BP与平面EFG无公共点，则$|BP|$的最小值是（　）



A. $2\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2

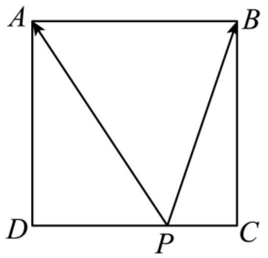
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 在复数范围内，方程$x^2+2=0$的解为____________．

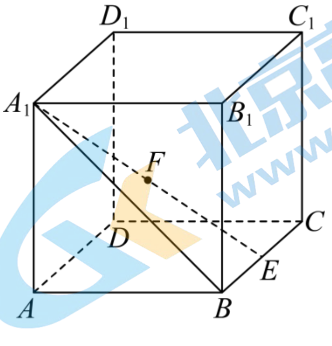
12. 已知一组数 1，2，m，6，7 的平均数为 4，则这组数的方差为______．

13. 如图，正方形$ABCD$的边长为 2，P为CD边上的一个动点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是__________．



14. 在$\triangle ABC$中，已知$B=2C$，$b=6$，$c=4$，则$\cos C=$____________，$\triangle ABC$的面积为____________．

15. 如图，在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱BC上的动点且不与B重合，F为线段A_1E的中点．给出下列四个命题：



①三棱锥 $A-A_1BE$ 的体积为 $\frac{1}{2}$；

② $AB_1 \perp A_1E$；

③ $\triangle ADF$ 的面积为定值；

④四棱锥 $F-ABB_1A_1$ 是正四棱锥.

其中所有正确命题的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知复数 $z=x+y\mathrm{i}\left(x>0,y>0\right)$ 满足 $\left|z\right|=5$，且 $z-3$ 是纯虚数.

（1）求 z 及 $\frac{1}{z}$；

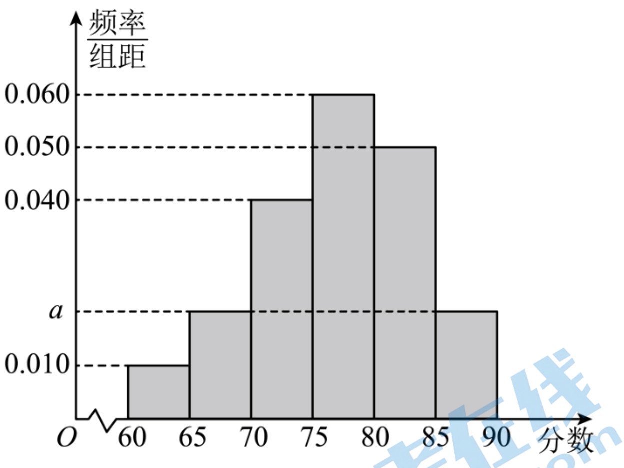
（2）若 $z^2+az+b=0\left(a,b\in\mathbf{R}\right)$，求 a 和 b 的值.

17. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是同一平面内的两个向量，其中 $\vec{a}=(1,2)$，且 $|\vec{b}|=\sqrt{5}$.

（1）若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，求 $\vec{b}$ 的坐标；

（2）若 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角.

18. 为提高服务质量，某社区居委会进行了居民对社区工作满意度的问卷调查．随机抽取了 100 户居民的问卷进行评分统计，评分的频率分布直方图如图所示，数据分组依次为：$\left[60,65\right)$，$\left[65,70\right)$，$\left[70,75\right)$，$\left[75,80\right)$，$\left[80,85\right)$，$\left[85,90\right]$.



（1）求 a 的值；

（2）求这 100 户居民问卷评分的中位数；

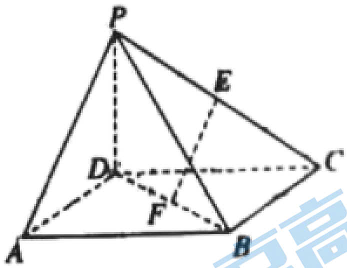
（3）若根据各组的频率的比例采取分层抽样的方法，从评分在 $\left[65,70\right)$ 和 $\left[70,75\right)$ 内的居民中共抽取 6 户居民，查阅他们答卷的情况，再从这 6 户居民中选取 2 户进行专项调查，求这 2 户居民中恰有 1 户的评分在 $\left[65,70\right)$ 内的概率.

19. 已知$\triangle ABC$中，$b\sin B+c\sin C=(a-2b\sin C)\sin A$.

（1）求A的大小；

（2）若D是边AB的中点，且$CD=2$，求$b+\frac{\sqrt{2}}{2}c$的取值范围，

20. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PD\perp$底面 $ABCD$，且$PD=1$，$AB=\sqrt{3}$，$AD=2$，E，F分别是PC，BD的中点.



（1）求证：$EF//$平面PAD；

（2）再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，求三棱锥$G-DCE$的体积.

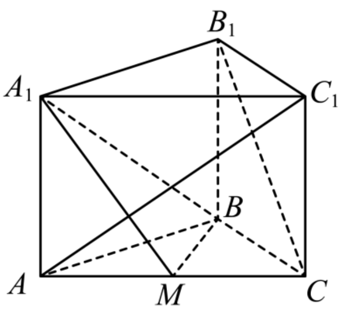
条件①：G是棱BC上一点，且$BG=2GC$；

条件②：G是PB的中点；

条件③：G是$\triangle PBC$的内心（内切圆圆心）.

注；如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

21. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，点M在棱AC上，且$B_1C//$平面A_1BM，$AB=BC$，$AC=2$，$AA_1=\sqrt{2}$.



（1）求证：M是棱AC的中点；

（2）求证：$AC_1\perp$平面A_1BM；

（3）在棱BB_1上是否存在点N，使得平面$AC_1N\perp$平面ACC_1A_1？如果存在，求出$\frac{BN}{BB_1}$的值；如果不存在，请说明理由.

参考答案

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合愿目要求的一项．

1.【答案】D

【分析】根据复数的分类和其几何意义即可得到答案.

【详解】由题意得 $b\neq 0$，则点 P 不在实轴上，则 C 错误，D 正确，

若 $a\neq 0,b\neq 0$，则 A 错误，若 $a=0,b\neq 0$，则其在虚轴上，则 B 错误，

故选：D.

2.【答案】C

【分析】根据向量加减法的法则即可得到答案.

【详解】对 A，当 $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$，且 $\vec{a},\vec{b}$ 同方向时，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|>\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，故 A 错误，

对 B，当 $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$，且 $\vec{a},\vec{b}$ 反方向时，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$，故 B 错误，

对 C，根据向量加法的平行四边形法则，得 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$，故 C 正确，

对 D，根据向量减法的三角形法则，得 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\geq\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|$，故 D 错误，

故选：C.

3.【答案】A

【分析】利用正弦定理进行边化角，结合两角和与差的正弦公式即可判断三角形形状.

【详解】因为 $2a\cos B=c$，

由正弦定理得 $2\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，

所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$，即 $\sin(A-B)=0$，

因为 $A,B\in\left(0,\pi\right)$，所以 $A-B\in\left(-\pi,\pi\right)$，则 $A-B=0$，即 $A=B$，

故 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

故选：A.

4.【答案】C

【分析】用列举法得出甲、乙、丙、丁四人中随机选出 2 人的事件数，从而可求甲被选中的概率.

【详解】从甲、乙、丙、丁四人中随机选出 2 人，

包括：甲乙；甲丙；甲丁；乙丙；乙丁；丙丁 6 种情况，

$\therefore$ 甲被选中的概率为 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

故选：C.

5.【答案】A

【分析】利用各组的频率之和等于 1 的性质即得.

【详解】由已知条件可得第一组到第四组数据的频率分别为 0.25，0.125，0.175，0.15，又这六组的频率之和是 1，

因此，第六组的频率为 $1-0.25-0.125-0.175-0.15-0.20=0.10$.

故选：A.

6. 【答案】B

【分析】按照百分位数的定义计算即可.

【详解】$10\times 0.7=7$，故从小到大排列后，35，54，58，58，72，80，85，86，111，125，

取第 7 个数和 8 个数的平均数得 $\dfrac{85+86}{2}=85.5$，

故选：B.

7. 【答案】D

【分析】根据平面的确定情况即可得到答案.

【详解】对 A，若这个点位于这条线段所在的直线上，则无法确定一个平面，故 A 错误，

对 B，若两条直线异面，则无法确定一个平面，故 B 错误；

对 C，若三点位于一条直线上，则无法确定一个平面，故 C 错误；

对 D，圆上不同的三点一定构成一个三角形，则可确定一个平面.

故选：D.

8. 【答案】D

【分析】由线线、面面关系以及充分、必要条件的概念即可得出结论.

【详解】若 m，n 是两条不同的直线，α，β 是两个不同平面，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，

则 $\alpha \parallel \beta \Rightarrow m /\!/ n$ 或 m，n 异面；

$m /\!/ n \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ 或平面 α 与平面 β 相交；

故“$\alpha /\!/ \beta$”是“$m /\!/ n$”的既不充分也不必要条件.

故选：D.

9. 【答案】B

【分析】根据线线关系、线面关系以及面面关系逐个判断各选项即可得出答案.

【详解】l 是直线，α，β 是两个不同平面，

若 $l /\!/ \alpha$，$l \parallel \beta$，则 $\alpha /\!/ \beta$ 或平面 α 与平面 β 相交，故 A 错误；

若 $l /\!/ \alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，故 B 正确；

若 $l\perp\beta$，$\alpha\perp\beta$，则 $l /\!/ \alpha$ 或 $l\subset\alpha$，故 C 错误；

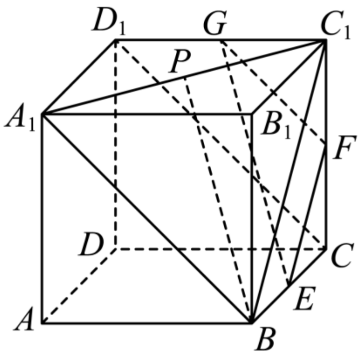
若 $l /\!/ \alpha$，$\alpha\perp\beta$ 则 l 与平面 β 相交或 $l \parallel \beta$ 或 $l\subset\beta$，故 D 错误.

故选: B.

10. 【答案】B

【分析】由直线 BP 与平面 EFG 无公共点，知 $BP//$ 平面 EFG，由平面 $BA_1C_1//$ 平面 EFG，知 P 点在 A_1C_1 上，利用三角形 BA_1C_1 为等边三角形可得 $|BP|$ 的最小值.

【详解】



如图：连接 CD_1, BA_1, BC_1, A_1C_1，

由正方体性质可知：$BA_1//CD_1//GF$，

因 $GF\subset$ 平面 EFG，$BA_1\not\subset$ 平面 EFG，

所以 $BA_1//$ 平面 EFG，

同理，$BC_1//EF$，

因 $EF\subset$ 平面 EFG，$BC_1\not\subset$ 平面 EFG，

所以 $BC_1//$ 平面 EFG，

又 $BA_1\cap BC_1=B$，

$BA_1\subset$ 平面 BA_1C_1，$BC_1\subset$ 平面 BA_1C_1，

所以平面 $BA_1C_1//$ 平面 EFG，

因直线 BP 与平面 EFG 无公共点，点 P 为底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上在意一点

所以 P 点在 A_1C_1 上，

故 $|BP|$ 最小时，$BP\perp A_1C_1$，

因正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

所以三角形 BA_1C_1 为边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形，

$BP\perp A_1C_1$ 时，$|BP|=2\sqrt{2}\times\sin 60^\circ=\sqrt{6}$，

故选：B

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$

【分析】根据复数的运算性质即可得方程的根.

【详解】在复数范围内，由方程 $x^2+2=0$ 得 $x^2=-2$，即 $x=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$

故答案为：$\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$.

12.【答案】$\dfrac{26}{5}$

【分析】先根据平均数计算出 m 的值，再根据方差的计算公式计算出这组数的方差.

【详解】依题意 $\dfrac{1+2+m+6+7}{5}=4, m=4$.所以方差为

$$\frac{1}{5}\left[(1-4)^2+(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2\right]=\frac{1}{5}[9+4+4+9]=\frac{26}{5}.$$

故答案为 $\dfrac{26}{5}$.

【点睛】本小题主要考查平均数和方差的有关计算，考查运算求解能力，属于基础题.

13.【答案】$[3,4]$

【分析】以 D 为原点，建立合适的直角坐标系，设 $P(x,0)$，$0\le x\le 2$，计算出 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x-1)^2+3$，根据二次函数的性质则得到其范围.

【详解】以 D 为原点，DC，DA 所在直线分别为 x，y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系，

则 $D(0,0), A(0,2), C(2,0), B(2,2)$，设 $P(x,0)$，其中 $0\le x\le 2$，

则 $\overrightarrow{PA}=(-x,2), \overrightarrow{PB}=(2-x,2)$，

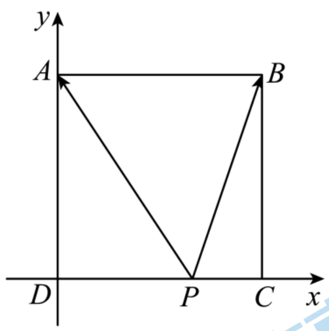
$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(-x)(2-x)+2\times 2=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$，

当 $x=1$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 有最小值 3，

当 $x=0$ 或 2 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 有最大值为 4，

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 $[3,4]$.

故答案为：$[3,4]$.



14.【答案】 ①. $\dfrac{3}{4}$ ##0.75 ②. $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

【分析】空 1：直接利用正弦定理,二倍角公式可得；空 2：先求出 $\sin C$，再由 $\cos C$ 可得 a，直接代入三角形面积公式即可.

【详解】因为 $B=2C$，所以 $\sin B=\sin 2C$，

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得 $\dfrac{6}{\sin B}=\dfrac{4}{\sin C}$，即 $\dfrac{3}{\sin 2C}=\dfrac{2}{\sin C}$，

则 $\dfrac{3}{2\sin C\cos C}=\dfrac{2}{\sin C}$，

又 $C\in(0,\pi),\sin C\neq 0$，所以 $\cos C=\dfrac{3}{4}$；

则 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，

又由余弦定理 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，即有 $a^2-9a+20=0$，解得 $a=4$ 或 $a=5$.

当 $a=4$ 时，$A=C$，又 $B=2C$，则 $C=\dfrac{\pi}{4}$，则 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，这与 $\cos C=\dfrac{3}{4}$ 矛盾，所以不符合题意，

舍去;

当 $a=5$ 时，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

故答案为：$\dfrac{3}{4}$；$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$.

15.【答案】②③④

【分析】利用锥体的体积公式可判断①，利用线面垂直的判定定理可判断②，利用平行线的传递性及三角形面积公式可判断③，利用正棱锥的定义可判断④.

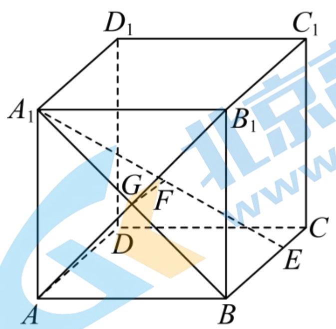
【详解】因为三棱锥 $A-A_1BE$ 体积为 $V_{A-A_1BE}=V_{A_1-ABE}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BE\cdot AA_1=\dfrac{1}{6}\cdot BE\leq\dfrac{1}{6}$，

所以三棱锥 $A-A_1BE$ 体积的最大值为 $\dfrac{1}{6}$，故①错误；

连接 AB_1，则 $AB_1\perp A_1B$，又 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，$AB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $AB_1\perp BC$，因为 $A_1B\cap BC=B$，$A_1B\cap BC\subset$ 平面 A_1BE，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BE，因为 $A_1E\subset$ 平面 A_1BE，所以 $AB_1\perp A_1E$，故②正确；



设 $A_1B \cap AB_1 = G$，连接 GF，则 $GF // BE, BE // AD$，所以 $GF // AD$，即 F 和 G 到 AD 的距离相等且不变，所以三角形 ADF 的面积不变，故③正确；

由 $GF // BC$，可知 $GF \perp$ 平面 ABB_1A_1，又 ABB_1A_1 为正方形，G 为其中心，故四棱锥 $F-ABB_1A_1$ 是正四棱锥，故④正确.

故答案为：②③④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【答案】(1) $z = 3+4\mathrm{i}$，$\dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}\mathrm{i}$

(2) $a = -6$，$b = 25$

【分析】(1) 根据复数的类型即可得到关于 x, y 的方程，解出即可；

(2) 根据一元二次方程复数根的特点结合韦达定理即可.

【小问 1 详解】

$\because z-3 = x-3+y\mathrm{i}$ 为纯虚数，$\therefore x = 3$，

$\because |z| = \sqrt{x^2+y^2} = 5$ 且 $y > 0$，$\therefore y = 4$，$z = 3+4\mathrm{i}$，

$$\therefore \frac{1}{z} = \frac{1}{3+4\mathrm{i}} = \frac{(3-4\mathrm{i})}{(3+4\mathrm{i})(3-4\mathrm{i})} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}\mathrm{i}$$

【小问 2 详解】

由 (1) 知，方程 $z^2 + b \cdot z + c = 0$ 的一根为 $z = 3+4\mathrm{i}$，则另一根为：$\overline{z} = 3-4\mathrm{i}$，

则 $\begin{cases} z+\overline{z} = -a = 6 \\ z \cdot \overline{z} = b = 25 \end{cases}$，

解得：$b = 25$，$a = -6$.

17.【答案】(1) $\vec{b} = (2,-1)$ 或 $\vec{b} = (-2,1)$

(2) $\dfrac{\pi}{3}$

【分析】(1) 设 $\vec{b} = (x, y)$，按照向量的坐标表示计算即可；

(2) 根据数量积与模、夹角的关系转化即可.

【小问 1 详解】

设 $\vec{b} = (x, y)$.

因为 $\vec{a} \perp \vec{b}$，$\vec{a} = (1,2)$，

所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 即 $x + 2y = 0$

又因为 $|\vec{b}| = \sqrt{5}$，所以 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5}$.

解之得 $x = 2$ 时，$y = -1$ 或 $x = -2$ 时，$y = 1$，

所以 $\vec{b}=(2,-1)$ 或 $\vec{b}=(-2,1)$.

【小问 2 详解】

记 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ.

因为 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$，所以 $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-2\vec{b})^2$，

则 $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+4\vec{b}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，

所以 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\vec{b}^2}{2|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{2}$，

又因为 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

18.【答案】（1）0.02

（2）77.5　（3）$\dfrac{8}{15}$

【分析】（1）根据已知条件, 由频率分布直方图中各组矩形面积之和等于 1, 即可求出 a 的值;

（2）结合频率分布直方图的性质, 以及中位数的定义, 即可求解;

（3）根据已知条件, 结合分层抽样的定义, 列举法, 以及古典概型的概率公式, 即可求解.

【小问 1 详解】

由频率分布直方图可得, $(0.01+2a+0.04+0.05+0.06)\times5=1$, 解得 $a=0.02$;

【小问 2 详解】

由频率分布直方图可得,

$(0.01+0.02+0.04)\times5=0.35<0.5$,

$(0.01+0.02+0.04+0.06)\times5=0.65>0.5$

则中位数在 $[75,80)$ 之间, 设为 x,

则 $(x-75)\times0.06+0.35=0.5$, 解得 $x=77.5$,

故中位数为 77.5 分;

【小问 3 详解】

评分在 $[65,70),[70,75)$ 对应的频率为 0.1,0.2,

从评分在 $[65,70)$ 和 $[70,75)$ 内的居民中共抽取 6 人,

则评分在 $[65,70)$ 占 2 人, 设为 a, b,

评分在 $[70,75)$ 占 4 人, A, B, C, D,

从 6 人中选取 2 人的情况为:

ab, aA, aB, aC, aD, bA, bB, bC, bD, AB, AC, AD, BC, BD, CD, 共 15 种,

其中这 2 人中恰有 1 人的评分在 $[65,70)$ 的情况为: aA, aB, aC, aD, bA, bB, bC, bD, 共 8 种,

故这 2 人中恰有 1 人的评分在 $[65,70)$ 内的概率为: $\frac{8}{15}$.

19.【答案】(1) $A=\frac{3\pi}{4}$

(2) $(2,2\sqrt{2})$

【分析】(1) 利用正弦定理将角化边，再由余弦定理得到 $\sin A=-\cos A$，即可求出 A；

(2) 设 $\angle ACD=\alpha$，利用正弦定理表示出 AD，AC，设 $f(\alpha)=b+\frac{\sqrt{2}}{2}c$，利用辅助角公式化简，最后结合正弦函数的性质计算可得.

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

$\because b\sin B+c\sin C=\sin A\cdot(a-2b\sin C)$，

$\therefore \sin^2 B+\sin^2 C=\sin A\cdot(\sin A-2\sin B\sin C)$，即 $b^2+c^2=a^2-2bc\sin A$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\therefore 2bc\sin A=-2bc\cos A$，则 $\sin A=-\cos A$，即 $\tan A=-1$，

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{3\pi}{4}$.

【小问 2 详解】

如图，设 $\angle ACD=\alpha$，则 $\angle ADC=\frac{\pi}{4}-\alpha$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，

在 $\triangle ACD$ 中,根据正弦定理，有 $\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，

$\therefore AD=\frac{c}{2}=2\sqrt{2}\sin\alpha$，$AC=b=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，

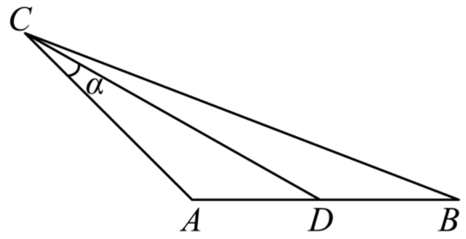
设 $f(\alpha)=b+\frac{\sqrt{2}}{2}c=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+4\sin\alpha=2\cos\alpha+2\sin\alpha$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

又 $\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(\alpha)$ 在 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，

所以 $f(\alpha)\in\left(f(0),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$，即 $f(\alpha)\in(2,2\sqrt{2})$，

所以 $b+\frac{\sqrt{2}}{2}c$ 的取值范围为 $(2,2\sqrt{2})$.



20.【答案】(1)见解析　(2)见解析

【分析】(1)连接 AC,则 AC 与 BD 交于 F 点,推导出 $EF//PA$,由此能证明 $EF//$ 平面 PAD;

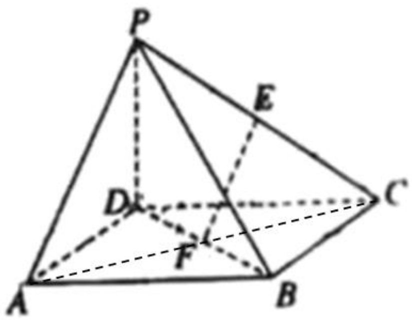
(2)选择①从而 $BC\perp$ 平面 PDC,再推导出三棱锥 $G-DCE$ 的高为 $GC=\frac{2}{3}$,由此能求出三棱锥 $G-DCE$ 的体积;选择条件②:推导出 $PD\perp BC,CD\perp BC$,从而 $BC\perp$ 平面 PDC,再推导出三棱锥 $G-DCE$ 的高为 $GE=1$,由此能求出三棱锥 $G-DCE$ 的体积;选择条件③:推导出 $PD\perp BC,CD\perp BC$,从而 $BC\perp$ 平面 PDC,设△PBC 的内切圆与 PC 边相切于点 H,则 $GH\perp PC$,三棱锥 $G-DCE$ 的高为 GH,由此能求出三棱锥 $G-DCE$ 的体积.

【小问 1 详解】

连接 AC,则 AC 与 BD 交于 F 点,

在 $\triangle PAC$ 中,E,F 均为中点,$\therefore EF//PA$,

$\because EF\not\subset$ 平面 PAD, $PA\subset$ 平面 PAD,$\therefore EF//$ 平面 PAD.



【小问 2 详解】

选择条件①

$\because PD\perp$ 平面 $ABCD$, $BC\subset$ 平面 $ABCD$,$\therefore PD\perp BC$,

又$\because$底面 $ABCD$ 是矩形,$\therefore CD\perp BC$,

$\because PD\cap CD=D, PD,CD\subset$ 平面 PCD,$\therefore BC\perp$ 平面 PDC,

$\because \overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GC}$,$\therefore G$ 是 BC 的三等分点,且 $GC=\frac{1}{3}BC$,

$\because BC=AD=2$,$\therefore$ 三棱锥 $G-DCE$ 的高为 $GC=\frac{2}{3}$,

$\because PD\perp$ 底面 $ABCD, DC\subset$ 底面 $ABCD$,$\therefore PD\perp DC$,

在△PDA 中,E 为 PC 中点,

$\therefore S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times PD\times DC=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore$三棱锥$G-DCE$的体积为:$V_{G-DCE}=\frac{1}{3}S_{\triangle DCE}\cdot GC=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18}$.

选择条件②

同条件①得到$BC\perp$平面PDC,

$\because G$是PB中点, E是PC中点,

$\therefore$在$\triangle PBC$中,$GE=\frac{1}{2}BC$,

$\therefore$三棱锥$G-DCE$的高为$GE=1$,

$\because PD\perp$底面$ABCD, DC\subset$底面$ABCD$, $\therefore PD\perp DC$,

在$\triangle PDC$中,E为PC中点,

$\therefore S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times PD\times DC=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore$三棱锥$G-DCE$的体积为: $V_{G-DCE}=\frac{1}{3}S_{\triangle DCE}\cdot GE=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{12}$.

选择条件③

同条件①得到$BC\perp$平面PDC,

设$\triangle PBC$的内切圆与PC边相切于点H, 则$GH\perp PC$,

$\because BC\perp$平面$PCD, PC\subset$平面$PCD, \therefore BC\perp PC, \therefore GH//BC$,

$\therefore$三棱锥$G-DCE$的高为GH,

在Rt$\triangle PDC$中, $PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=2$, $BC=2$,

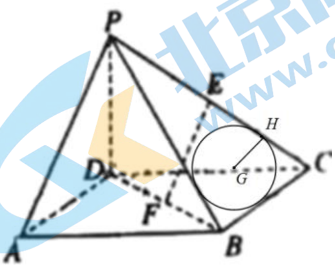
$\therefore PB=\sqrt{PC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$, $\therefore GH=\dfrac{\frac{1}{2}\times 2\times 2}{\frac{1}{2}(2+2+2\sqrt{2})}=2-\sqrt{2}$,

$\because PD\perp$底面$ABCD, DC\subset$底面$ABCD$, $\therefore PD\perp DC$,

在$\triangle PDC$中,E为PC中点,

$\therefore S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle PDC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times PD\times DC=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore$三棱锥$G-DCE$的体积为: $V_{G-DCE}=\frac{1}{3}S_{\triangle DCE}\cdot GH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2-\sqrt{2})=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{12}$.



21.【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析　(3) 存在，$\dfrac{BN}{BB_1}=\dfrac{1}{2}$

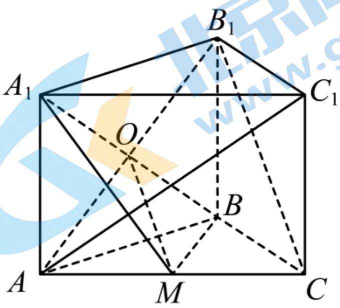
【分析】(1) 连接 AB_1 与 A_1B，两线交于点 O，连接 OM，利用线面平行的性质可得 $OM \parallel B_1C$，再由三角形中位线性质即可证;

(2) 应用线面垂直的性质、判定可得 $BM\perp$ 平面 ACC_1A_1，从而得到 $BM\perp AC_1$，根据 $\angle AC_1C=\angle A_1MA$ 和 $\angle AC_1C+\angle C_1AC=90^\circ$ 得到 $A_1M\perp AC_1$，再利用线面垂直的判定即可证;

(3) 当点 N 为 BB_1 的中点，设 AC_1 的中点为 D，连接 DM, DN，先证四边形 $BNDM$ 为平行四边形，从而得到 $BM \parallel DN$，进而有 $DN\perp$ 平面 ACC_1A_1，再利用面面垂直的判定即可证.

【小问 1 详解】

连接 AB_1 与 A_1B，两线交于点 O，O 为 AB_1 的中点，连接 OM,



因为 $B_1C//$ 平面 A_1BM，$B_1C\subset$ 平面 AB_1C，平面 $AB_1C\cap$ 平面 $A_1BM=OM$，

所以 $OM\parallel B_1C$，又在 $\triangle AB_1C$ 中 O 为 AB_1 的中点,

所以 M 是 AC 的中点;

【小问 2 详解】

因为 $AA_1\perp$ 底面 ABC, $BM\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BM$，又 M 为棱 AC 的中点，$AB=BC$，所以 $BM\perp AC$，

因为 $AA_1\cap AC=A, AA_1, AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，

所以 $BM\perp$ 平面 ACC_1A_1, $AC_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BM\perp AC_1$,

因为 $AC=2$，所以 $AM=1$，又 $AA_1=\sqrt{2}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACC_1$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle A_1AM$ 中，$\tan\angle AC_1C=\tan\angle A_1MA=\sqrt{2}$,

所以 $\angle AC_1C=\angle A_1MA$，即

$\angle AC_1C+\angle C_1AC=\angle A_1MA+\angle C_1AC=90^\circ$,

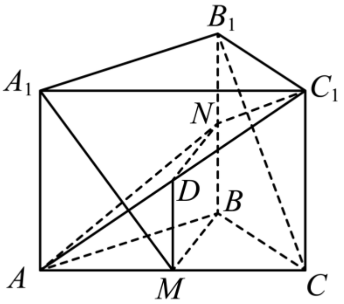
所以 $A_1M\perp AC_1$，又 $BM\cap A_1M=M, BM, A_1M\subset$ 平面 A_1BM，

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BM；

【小问 3 详解】

当点 N 为 BB_1 的中点, 即 $\frac{BN}{BB_1}=\frac{1}{2}$ 时, 平面 $AC_1N\perp$平面 AA_1C_1C

证明如下: 设 AC_1 的中点为 D, 连接 DM, DN,



因为 DM 分别为 AC_1, AC 的中点,

所以 $DM\parallel CC_1$ 且 $DM=\frac{1}{2}CC_1$, 又 N 为 BB_1 的中点,

所以 $DM\parallel BN$ 且 $DM=BN$,

所以四边形 $BNDM$ 为平行四边形, 故 $BM\parallel DN$,

由（2）知 $BM\perp$平面 ACC_1A_1, 所以 $DN\perp$平面 ACC_1A_1,

又 $DN\subset$平面 AC_1N, 所以平面 $AC_1N\perp$平面 ACC_1A_1.